目 录

I. 多复变数的解析函数

§ 1.1. 解析函数. 我們命 C^n 表 n 个独立的复变数 $z_1, \cdots, z_n$ 的空間. 此空間的点为一組 n 个有限的复数 $(a_1, \cdots, a_n)$. 为簡便起見,我們常以 z 代表 n 个复变数, 即 $z = (z_1, \cdots, z_n)$, 而以 a 代表此空間的点,即 $a = (a_1, \cdots, a_n)$.

以 a 为展开点的 (n 重) 冪級数

$$\sum_{m_1, \cdots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1 \cdots m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} \cdots (z_n - a_n)^{m_n} \qquad (1.1.1)$$

($a_{m_1 \cdots m_n}$ 为常数) 称为在 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 点收斂, 如果在 $z = b$ 点[1]有一个方法把此級数排列成为单級数,而此級数是收斂的.

空間 C^n 中的多圓柱 $P(a, r)$ 为一点集, 由适合下列不等式的 z 点組成:

$$|z_1 - a_1| < r_1, \cdots, |z_n - a_n| < r_n,$$

此处 $r = (r_1, \cdots, r_n)$ 是一組 n 个正数, 而 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 点称为多圓柱的中心.

定理 1.1.1. 若級数(1.1.1)在 $z = b$ 点收斂,則此級数在多圓柱

$$|z_1 - a_1| < |b_1 - a_1|, \cdots, |z_n - a_n| < |b_n - a_n|$$

中任一紧致子集上一致收斂.

此定理可仿单重冪級数的相应定理的証明而得之, 即方法上是平行的推广. 讀者試自証之.

在 a 点解析的函数或函数元素 $f(z) \equiv f(z_1, \cdots, z_n)$, 即 $f(z)$ 在一以 a 点为中心的多圓柱 $P(a, r)$ 定义并在此多圓柱能展为收斂的冪級数者, 由冪級数的理論可知, 在 $P(a, r)$ 的每一点

1) $z = b$ 即 $z_1 = b_1, \cdots, z_n = b_n$.

$c=(c_1,\cdots,c_n)$，級数 (1.1.1) 若在 $P(a,r)$ 收斂，則能以 c 为展开点在一多圓柱 $P(c,\delta)$ [$\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_n)$ 为一組适当小之正数] 展为收斂的冪級数，因之 $f(z)$ 在 $P(a,r)$ 的每一点皆是解析的.

又由冪級数的理論知，$f(z)$ 在 $P(a,r)$ 是連續的，其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial z_\alpha}$ $(\alpha=1,\cdots,n)$ 存在[1]，且等于級数的逐項偏导数之和；此外 $\dfrac{\partial f}{\partial z_\alpha}$ 在 $P(a,r)$ 也是解析的，因之 $f(z)$ 有任意次的对 $z_1,\cdots,z_n$ 的連續偏微分，并且易証 $f(z)$ 的展式的系数适合

$$a_{m_1\cdots m_n}=\frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\left[\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right]_{z=a}. \qquad (1.1.2)$$

在 $P(a,r)$ 中，当 $z_1,\cdots,z_{\alpha-1},z_{\alpha+1},\cdots,z_n$ 固定时，显然 $f(z)$ 是单复变数 z_α 的在圓 $|z_\alpha-a_\alpha|<r_\alpha$ 解析的函数. 若命 $z_\alpha=x_\alpha+iy_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,n)$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$ 是实变数，u 与 v 是实函数，則根据单复变数解析函数的性質知道，对每一整数 $\alpha(=1,\cdots,n)$，u 与 v 适合 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial v}{\partial y_\alpha},\quad \frac{\partial u}{\partial y_\alpha}=-\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}. \qquad (1.1.3)$$

C^n 中的一开集 D 定义为 C^n 的一个子集，对 D 的每一点 a 能有一多圓柱 $P(a,r)$ 包含于 D 者. 开集 D 称为(单叶)域，如果 D 是連通的. 在单叶域 D 定义的函数 $f(z)$，在每一点 $z\in D$，对应有唯一的复数值 $f(z)$. 若 $f(z)$ 在 D 的每一点皆是解析的，則 $f(z)$ 称为在域 D 解析[2].

利用单复变数函数論的 Liouville 定理，立刻得到

定理 1.1.2. 若 $f(z)$ 在 C^n 解析并且有界，則必为常数.

§ 1.2. 多圓柱的 Cauchy 积分. 設 D_α 为 z_α 平面的一域，广

---

1) 如单复变数函数論一样，有人利用偏导数的存在定义解析 (参閱 § 1.4).

2) 在单叶域上定义的解析函数即单值的解析函数. 非单叶域的定义比較复杂；本书只限于討論单叶域. 以后我們簡称单叶域为域.

义多圆柱 $D_1\times\cdots\times D_n$ 是 C^n 中的域，由所有的 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 点所組成，其中 $z_1\in D_1,\cdots,z_n\in D_n$.

現設每一 D_α 皆是 z_α 平面的有界域，其边界 C_α 由有限多个互不相交的、有长的、簡单的閉曲綫組成. 設 $f(z)$ 在 $D_1\times\cdots\times D_n$ 解析，且在其边界仍然連續，則对任一点 $z\in D_1\times\cdots\times D_n$ 有广义多圆柱的 Cauchy 公式

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1\times\cdots\times C_n}\cdots\int\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\cdots d\zeta_n. \tag{1.2.1}$$

实际上，当 $n=1$ 时上式是熟知的. 利用归納法，假設 $n-1$ 个复变数时上式成立. 現在視 $f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 为 z_1 的在 D_1 解析的函数族，$z_2,\cdots,z_n$ 为参数，則由 $f(z)$ 的連續性假定知，$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 是单复变数 z_1 的正規族，并且对任一組数 $\zeta_2\in C_2,\cdots,\zeta_n\in C_n$，函数

$$f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=\lim_{z_2\to\zeta_2,\cdots,z_n\to\zeta_n}f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$$

仍然在 D_1 解析. 应用归納法的假定，便有

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{C_2\times\cdots\times C_n}\cdots\int\frac{f(z_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)}{(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_2\cdots d\zeta_n=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_2\times\cdots\times C_n}\cdots\int\frac{d\zeta_2\cdots d\zeta_n}{(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}\int_{C_1}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1.$$

由于 $f(\zeta)$ 的連續性，上式即(1.2.1).

由(1.2.1)易知

$$\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}=$$

$$=\frac{m_1!\cdots m_n!}{(2\pi i)^n}\int_{C_1\times\cdots\times C_n}\cdots\int\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)^{m_1+1}\cdots(\zeta_n-z_n)^{m_n+1}}. \tag{1.2.2}$$

特别取 D_α 为圆 $|z_\alpha-a_\alpha|<r_\alpha$ 时，由上式及(1.1.2)可得

$$a_{m_1\cdots m_n}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-a_1|=r_1}\cdots$$

$$\cdots\int_{|\zeta_n-a_n|=r_n}\frac{f(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-a_1)^{m_1+1}\cdots(\zeta_n-a_n)^{m_n+1}} \quad (1.2.3)$$

及

$$|a_{m_1\cdots m_n}|\leqslant\frac{M}{r_1^{m_1}\cdots r_n^{m_n}}, \quad (1.2.4)$$

其中 M 是 $|f(\zeta)|$ 在 $|\zeta_1-a_1|=r_1,\cdots,|\zeta_n-a_n|=r_n$ 之高界.

若有在域 D 解析的函数 $f(z)$. 在 D 的一点 a 取一多圓柱 $P(a,r)$，其閉包 $\bar{P}(a,r)$:

$$|z_1-a_1|\leqslant r_1,\cdots,|z_n-a_n|\leqslant r_n$$

仍然包含于D中，則由(1.2.3)及(1.2.4)可知

定理 1.2.1. 若 $f(z)$ 在域D解析，則它在域 D 的 a 点的展式(1.1.1)是唯一的，并且此展式在任一包含于D的以 a 为心的多圓柱成立.

定理 1.2.2. 若 $f(z)$ 在域D解析，且在域 D 中一非空的开子集上等于零，則 $f(z)$ 在整个域D恆等于零.

实际上，$f(z)$ 最少在一包含于D的多圓柱 $P(a,r)$ 內恆等于零. 如 b 是D的任一点，可以用D中的一曲綫与 a 点相联，而以有限个包含于 D 的多圓柱蓋过此曲綫，則 $f(b)$ 亦必須等于零，只要我們証明，在一多圓柱解析的函数若在一非空开子集上为零則恆等于零. 后者用解析函数的冪級数展式是容易証明的.

定理 1.2.3. 設 $f(z)$ 在原点的邻域 P_n:

$$|z_1|<r_1,\cdots,|z_n|<r_n$$

中解析，命 $z_\alpha=x_\alpha+iy_\alpha$ $(\alpha=1,\cdots,n)$. 若 $f(z)$ 在点集

$$-r_\alpha<x_\alpha<r_\alpha,\quad y_\alpha=0,\quad \alpha=1,\cdots,n$$

(或者在 $x_\alpha=0$, $-r_\alpha<y_\alpha<r_\alpha$, $\alpha=1,\cdots,n$) 上等于零，則 $f(z)$ 在 P_n 中恆等于零.

証. $f(z)$ 可在 P_n 中展为收斂的冪級数

$$f(z) = \sum_{m_1, \cdots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1 \cdots m_n} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}.$$

当 $z_1, \cdots, z_n$ 取实值时，級数

$$f(x) = \sum_{m_1, \cdots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1 \cdots m_n} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} = 0.$$

因此

$$\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(x)}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} = 0,$$

特别是

$$a_{m_1 \cdots m_n} = \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \left[\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(x)}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} \right]_{x=0} = 0.$$

由此知 $f(z) \equiv 0$. 証毕.

定理 1.2.4. 若 $2n$ 个复变数的函数

$$f(z_1, \zeta_1, z_2, \zeta_2, \cdots, z_n, \zeta_n)$$

在 C^{2n} 空間的原点的邻域解析，而在此邻域中适合下面条件的子集（$\bar{z}_\alpha$ 表 z_α 的复数共軛）

$$\zeta_1 = \bar{z}_1, \cdots, \zeta_n = \bar{z}_n \tag{1.2.5}$$

上为零，即

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \cdots, z_n, \bar{z}_n) = 0,$$

則在整个邻域中

$$f(z_1, \zeta_1, z_2, \zeta_2, \cdots, z_n, \zeta_n) \equiv 0.$$

証. 我們作綫性变换

$$u_\alpha = \frac{z_\alpha + \zeta_\alpha}{2}, \quad v_\alpha = \frac{z_\alpha - \zeta_\alpha}{2i}, \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

其逆变换为

$$z_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha, \ \zeta_\alpha = u_\alpha - iv_\alpha, \ \alpha = 1, \cdots, n.$$

函数

$$\varphi(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n) \equiv f(u_1 + iv_1, u_1 - iv_1, \cdots, u_n + iv_n, u_n - iv_n)$$

在复变数 $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n$ 空間的原点的邻域解析.

适合条件(1.2.5)的点集，經变换映为 $u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n$ 空間的适合下面条件的点集:

$$(u_\alpha - \bar{u}_\alpha) - i(v_\alpha - \bar{v}_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

此乃表示 $\varphi(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)$ 在 u_α, v_α 取实値时等于零。据定理 1.2.3，它必須恆等于零，因之 $f(z_1, \zeta_1, \cdots, z_n, \zeta_n)$ 亦然。

定理 1.2.5. 若 $f(z)$ 在域 D 解析且非常数，則 $|f(z)|$ 不能在 D 的內点达到其最大值。如 $f(z)$ 在 D 的边界仍然連續，則 $|f(z)|$ 在边界上达到其最大值。

实际上只要証明，如果 $|f(z)|$ 在 D 的一內点 a 达到其极大値，則 $f(z)$ 在 D 为常数。据定理 1.2.2，这只要証明 $|f(z)|$ 在一包含于 D 的多圓柱 $P(a, r)$ 为常数便可。設 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 为 $P(a, r)$ 的任一点，据假設，$|f(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)| \geqslant |f(a_1, \cdots, a_{n-1}, z_n)|$，当 $|z_n - a_n| < r_n$。应用单复变数函数論的极大模原理知，$f(a_1, \cdots, a_{n-1}, z_n)$ 为常数，故有 $f(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n) = f(a_1, \cdots, a_{n-1}, b_n)$。再应用极大模原理于单变数函数 $f(a_1, \cdots, a_{n-2}, z_{n-1}, b_n)$ 可知，$f(a_1, \cdots, a_{n-2}, b_{n-1}, b_n) = f(a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, b_n)$。如此継續，最后得出 $f(a_1, \cdots, a_n) = f(b_1, \cdots, b_n)$，故 $f(z)$ 在 $P(a, r)$ 为常数。定理第二部分的証明是显然的。

値得注意的是，如 $f(z)$ 在边界仍然連續，則 $|f(z)|$ 往往在边界的某一子集(不必包括全部边界)达到其最大值。此子集由域 D 的几何結构所确定，这里仅以单位閉多圓柱 $\bar{P}_n$:

$$|z_1| \leqslant 1, \cdots, |z_n| \leqslant 1$$

为例。

如 $f(z)$ 在 $\bar{P}_n$ 連續且在其內点解析，則 $[f(z)]^k$ 亦有此性質(k 为任意的正整数)。应用多圓柱的 Cauchy 公式得[1]

$$f^k(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathfrak{C}_n} \frac{f^k(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

---

1) 为簡便起見，在不致引起混乱的情況下，我們往往用一重积分符号代表多重积分符号。

其中 $\mathfrak{L}_n$ 代表点集

$$|z_1| = 1, \cdots, |z_n| = 1.$$

我們有估值

$$|f(z)|^k \leqslant \frac{M^k}{(2\pi i)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1\cdots d\theta_n}{|e^{i\theta_1}-z_1|\cdots|e^{i\theta_n}-z_n|}$$

或

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{(2\pi)^{\frac{n}{k}}}\left\{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_1\cdots d\theta_n}{|e^{i\theta_1}-z_1|\cdots|e^{i\theta_n}-z_n|}\right\}^{\frac{1}{k}},$$

其中 $M = \sup\limits_{\zeta\in\mathfrak{L}_n}|f(\zeta)|$, $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$.

命 $k\to\infty$, 我們有

$$|f(z)| \leqslant M,$$

此乃表示 $|f(z)|$ 在 $\mathfrak{L}_n$ 达到其最大值. 注意 $\mathfrak{L}_n$ 仅是 $\bar{P}_n$ 的边界的 n 維子集, 而 $\bar{P}_n$ 的边界是 $(2n-1)$ 維点集. $\mathfrak{L}_n$ 秾为 P_n 的特征流形.

除多圓柱外,其他域的 Cauchy 公式的研究可参閱 A. Weil[1], Bergmann[1], Martinelle[1], 华罗庚 [5], 华罗庚与陆启鏗[1]等人的工作.

§ **1.3. 形式微分.** 視

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha, \quad \bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$$

或

$$x_\alpha = \frac{z_\alpha + \bar{z}_\alpha}{2}, \quad y_\alpha = \frac{z_\alpha - \bar{z}_\alpha}{2i}$$

为变数的变換而引进形式微分

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \tag{1.3.1}$$

卽若 $f(x, y)$ 是实变数 x, y 的有連續偏微分的函数, 則定义

$$\frac{\partial f}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right).$$

如是 Cauchy-Riemann 方程(1.1.3)可书为下面簡洁的形式

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n, \tag{1.3.2}$$

其中 $f = u + iv$。

应用形式微分，我們有

定理 1.3.1. 若 $f_\alpha(z) = u_\alpha(x, y) + iv_\alpha(x, y)$ 是 z 的在某一域解析的函数，則在此域中有如下的恆等式：

$$\det \frac{\partial(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)} = \left| \det \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)} \right|^2,$$

此处我們以 $\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}$ 表函数方陣

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_n} & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix},$$

而 $\det A$ 表一方陣 A 的行列式。

証. 应用 Cauchy-Riemann 方程，經計算可得矩陣关系式

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -iI \\ I & iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial(u_1, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} & \frac{\partial(v_1, \cdots, v_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \\ \frac{\partial(u_1, \cdots, u_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} & \frac{\partial(v_1, \cdots, v_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)} & O \\ O & \overline{\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}} \end{pmatrix}, \tag{1.3.3}$$

其中 I 表 $n \times n$ 么方陣，即

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

由(1.3.3)立得定理.

定理 1.3.2. 設

$$f_\alpha(z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_m), \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

是 $m+n$ 个复变数 $z=(z_1, \cdots, z_n)$, $w=(w_1, \cdots, w_m)$ 的函数,在 C^{m+n} 空間的 $z=a=(a_1, \cdots, a_n)$, $w=b=(b_1, \cdots, b_m)$ 点的邻域[1]解析. 若 $f_\alpha(a, b)=0$, $\alpha=1, \cdots, n$ 而

$$\left[\det \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}\right]_{z=a,\, w=b} \neq 0,$$

則函数方程

$$f_\alpha(z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_m)=0, \quad \alpha=1, \cdots, n \quad (1.3.4)$$

有唯一的解

$$z_\alpha = g_\alpha(w_1, \cdots, w_m), \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

并且此解在 C^m 空間的 $w=b$ 点的邻域解析. 此外 $g_\alpha(b)=a_\alpha$ $(\alpha=1, \cdots, n)$.

証. 命 $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, $f_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha$ $(\alpha=1, \cdots, n)$ 及 $w_k = s_k + it_k$ $(k=1, \cdots, m)$. 根据假設及定理 1.3.1 知

$$\left[\det \frac{\partial(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)}\right]_{z=a,\, w=b} \neq 0.$$

根据实变数的隐函数理論知,方程(1.3.4)有唯一的解

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(s, t), \quad y_\alpha = \psi_\alpha(s, t), \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

其中 φ_α 与 ψ_α 是实变数 $s=(s_1, \cdots, s_m)$, $t=(t_1, \cdots, t_m)$ 的在 $w=b$ 点邻域中的实解析函数[2].

命 $g_\alpha = \varphi_\alpha + i\psi_\alpha$. 在(1.3.4)中对 $\bar{w}_k$ 微分,有

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{w}_k} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta} \frac{\partial \bar{g}_\beta}{\partial \bar{w}_k} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta} \frac{\partial g_\beta}{\partial \bar{w}_k} = 0.$$

由于 $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}_\beta}=0$, $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{w}_k}=0$, 我們得

---

1) 所謂一点的邻域就是包含此点的开集.

2) 在 n 維实欧氏空間 R^n 的一域定义的实解析函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 即在此域的每一点 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 有一邻域,在其中 φ 能展为 $x_1-\alpha_1, \cdots, x_n-\alpha_n$ 的收斂的冪級数.

$$\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta} \frac{\partial g_\beta}{\partial \bar{w}_k} = 0.$$

由于 $\det \dfrac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}$ 可在 $z = a$, $w = b$ 点的充分小邻域中不为零,根据齐次綫性方程的理論知,必須

$$\frac{\partial g_\beta}{\partial \bar{w}_k} = 0.$$

此式在 C^m 空間的 $w = b$ 点的充分小邻域 $P(a, r)$ 中成立. 此乃表示 $g_\beta(w)$ 当 $w_1, \cdots, w_{k-1}, w_{k+1}, \cdots, w_m$ 固定时是 w_k 的解析函数. 我們取 $P(b, r)$ 如此之小, 使得 $g_\beta(w)$ 在 $P(b, r)$ 的閉包連續. 重复应用单复变数的 Cauchy 公式得

$$g_\beta(w) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{|\zeta_1 - b_1| = r_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{|\zeta_m - b_m| = r_m} \frac{g_\beta(\zeta_1, \cdots, \zeta_m)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_m}{(\zeta_1 - w_1) \cdots (\zeta_m - w_m)} =$$

$$= \sum_{k_1, \cdots, k_m = 0}^{\infty} a_{k_1 \cdots k_m} (w_1 - b_1)^{k_1} \cdots (w_m - b_m)^{k_m},$$

其中

$$a_{k_1 \cdots k_m} = \frac{1}{r_1^{k_1} \cdots r_m^{k_m}} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} g_\beta(b_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \cdots, b_m + r_m e^{i\theta_m}) e^{-ik_1\theta_1} \cdots e^{-ik_m\theta_m} d\theta_1 \cdots d\theta_m.$$

上面的級数在 $P(b, r)$ 中收斂,故 $g_\beta(w)$ 是 w 的在 $w = b$ 点邻域中解析的函数. 定理得証.

設 u 是在一域 D 解析的函数 $f(z)$ 的实部,即 $u = \dfrac{1}{2}(f + \bar{f})$. 由此可見 u 适合偏微分方程組

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \cdots, n \tag{1.3.5}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta \partial y_\alpha} = 0,$$

$$\alpha, \beta = 1, \cdots, n. \tag{1.3.6}$$

显然 $f(z)$ 的虚部 $v=\frac{1}{2i}(f-\bar{f})$ 亦适合方程(1.3.5).

有二級連續偏微分的实值函数 $u(x, y)$ 适合偏微分方程組(1.3.5)者称为 B-調和函数(在 $n=1$ 时即普通的調和函数).

反之,給与一域 D 的 B-調和函数 u, 是否存在一 B-調和函数 v, 使得 $u+iv$ 在 D 解析？回答是肯定的. 由綫积分定义的函数

$$v(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)=\int_{z_0}^{z}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(-\frac{\partial u}{\partial y_\alpha}dx_\alpha+\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}dy_\alpha\right) \quad (1.3.7)$$

便是所求的函数. 但是要注意, v 一般是非单值函数,除非 D 是单連通的(即在 D 中的任一閉簡单曲綫能連續地在 D 縮为一点). 后一断言要借助 Stoke 公式証明,这里从略.

有兴趣的是, 偏微分方程組 (1.3.5) 的边界問題应如何提法? 习知 $n=1$ 时, (1.3.5) 为 Laplace 方程. 任一由有限个互不相交的 Jordan 曲綫围成的域 D, 在边界上給定連續的边界值后, 恒存在唯一的在 D 內調和的函数, 它在边界上取已給的边界值. 这就是所謂 Dirichlet 問題之解. 这問題的解决对实际应用及保角映照問題有重大的价值. 当 $n>1$ 时,給定一域 D 的連續边界值,是否相应的存在唯一的 B-調和函数取已給的边界值呢? 这問題一般沒有解. 例如 $n=2$ 时,式 (1.3.5) 为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial\bar{z}_1}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_2\partial\bar{z}_1}=0. \quad (1.3.8)$$

在单位双圓柱 $P_2=\{|z_1|<1, |z_2|<1\}$ 的特征流形 $\mathfrak{C}_2=\{|\zeta_1|=1, |\zeta_2|=1\}$ 上給定連續实函数 $\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$, 則易見双重 Poisson 积分

$$u(z_1, z_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1e^{-i\theta_1}|^2}\cdot \frac{1-|z_2|^2}{|1-z_2e^{-i\theta_2}|^2}\varphi(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})\,d\theta_1\,d\theta_2$$

代表一函数在 P_2 中适合(1.3.8)的首两个方程,即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial\bar{z}_1}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}=0. \quad (1.3.9)$$

此函数在 P_2 的边界值已經完全确定，因如 $|\zeta_1|=1$，由单复变数的 Poisson 积分的边界性质知

$$\lim_{z_1\to\zeta_1} u(z_1, z_2) = \lim_{z_1\to\zeta_1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1e^{-i\theta_1}|^2}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_2|^2}{|1-z_2e^{-i\theta_2}|^2}\varphi(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})\,d\theta_2\right\}d\theta_1 =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_2|^2}{|1-z_2e^{-i\theta_2}|^2}\varphi(\zeta_1, e^{i\theta_2})\,d\theta_2.$$

同样，若 $|\zeta_2|=1$，

$$\lim_{z_2\to\zeta_2} u(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1e^{-i\theta_1}|^2}\varphi(e^{i\theta_1}, \zeta_2)\,d\theta_1.$$

此外，$u(z_1, z_2)$ 在 $\mathfrak{L}_2$ 上取已給的边界值，即

$$\lim_{\substack{z_1\to\zeta_1\\ z_2\to\zeta_2}} u(z_1, z_2) = \varphi(\zeta_1, \zeta_2).$$

因此 $u(z_1, z_2)$ 是适合方程組 (1.3.9) 的取已給边界值的唯一解，因为凡在 P_2 适合方程組(1.3.9)而在边界上仍然連續的函数必然在 $\mathfrak{L}_2$ 上取最大与最小值，这可以从普通的极值原理知之.

由上面的事实得知，适合方程組(1.3.9)的函数不能在 P_2 的边界上任意給定連續的边界值. 而适合方程組(1.3.8)的函数必适合方程組 (1.3.9)，因之亦不能在整个边界上任意給定边界值. 更甚之，就是仅給定了特征流形 $\mathfrak{L}_2$ 上的連續边界值，亦未必有一在 P_2 适合(1.3.8)的函数在 P_2 的边界連續，而在 $\mathfrak{L}_2$ 上取已給的边界值. 例如給与 $\mathfrak{L}_2$ 上的連續函数 $\zeta_1\bar{\zeta}_2+\bar{\zeta}_1\zeta_2$. 如果(1.3.8)有一解 $u(z_1, z_2)$ 取已給的边界值，則 u 必适合(1.3.9)，而(1.3.9)的解是唯一的，即必須

$$u(z_1, z_2) = z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2.$$

但显見 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial\bar{z}_2} = 1 \neq 0$. 矛盾.

偏微分方程組 (1.3.6) 的研究，不仅对于函数論而且对于偏微分方程的理論而言也是十分有意义的. 迄今还只有很少的結果. 有人首先考虑具有特征流形的域，而研究在特征流形上給定連續

边界値后，有唯一的解的偏微分方程．关于这方面的工作可参閲 S. Bergmann[3]，华罗庚与陆启鏗[2]．

§1.4. **两个复变数的 Hartogs 定理．** 本节仅考虑两个复变数 z, w 的情况．

定理 1.4.1. (Hartogs 定理)．函数 $f(z, w)$ 在双圆柱 $P=\{|z|<r, |w|<s\}$ 中定义．若对每一 $z_0(|z_0|<r)$，$f(z_0, w)$ 是 w 的在 $|w|<s$ 解析的函数，对每一 $w_0(|w_0|<s)$，$f(z, w_0)$ 是 z 的在 $|z|<r$ 解析的函数，则 $f(z, w)$ 是两个复变数 z, w 的解析函数．

注意，如果假設 $f(z, w)$ 是 z 与 w 的連續函数，则应用双圆柱的 Cauchy 公式，立刻得出定理(参閲定理 1.3.2 証明之末)．此定理之困难在于从定理的假設仅能得知，当 w 固定时，$f(z, w)$ 是 z 的連續函数，当 z 固定时是 w 的連續函数．而从結論却可推出 $f(z, w)$ 是 z, w 的連續函数．这种困难在单复变数函数論中是不会碰到的．

此定理的証明分三个步驟进行，即下面的三个定理：

定理 1.4.2. 若双圆柱 $P=\{|z|<r, |w|<s\}$ 中的函数 $f(z, w)$ 当 z 固定时是 w 的解析函数，当 w 固定时是 z 的解析函数，此外 $f(z, w)$ 有界，即在 P 中 $|f(z, w)|<M$ (M 是一正常数)，则 $f(z, w)$ 是 z 与 w 的在 P 中解析的函数．

証． 根据假設，对固定的 $z(|z|<r)$，$f(z, w)$是 w 的 $|w|<s$ 解析的函数，因此 $\dfrac{\partial f(z, w)}{\partial w}$ 仍在 $|w|<s$ 解析．我們断言，$\dfrac{\partial f(z, w)}{\partial w}$ 对每一固定的 $w(|w|<s)$，是 z 的在 $|z|<r$ 解析的函数．实际上，对任一点 $b(|b|<s)$，我們有一閉圆 $\bar{C}_b$: $|w-b|\leqslant s_b$ ($s_b<s-|b|$)，使得視 $w(w\in\bar{C}_b)$ 为参数时，函数族

$$\frac{f(z, w)-f(z, b)}{w-b} \tag{1.4.1}$$

是 z 的在 $|z|<r$ 解析的函数族并且一致有界，因为当 z 固定时，上式显然是 w 的在 $\bar{C}_b$ 解析的函数，应用极大模原理

$$\left|\frac{f(z,w)-f(z,b)}{w-b}\right| \leqslant \sup_{|w-b|=s_b} \frac{|f(z,w)-f(z,b)|}{s_b} \leqslant \frac{2M}{s_b}.$$

此乃表示函数族(1.4.1)成一正規族[1]，故极限函数

$$\lim_{w\to b} \frac{f(z,w)-f(z,b)}{w-b} = \left[\frac{\partial f(z,w)}{\partial w}\right]_{w=b}$$

仍在 $|z|<r$ 中解析．由于 b 可以是 $|w|<s$ 中任一点，故得所証．

視 $z(|z|<r)$ 为参数，$f(z,w)$ 是 w 的在 $|w|<s$ 解析的函数族，并且是局部一致有界的，因此 $\dfrac{\partial f(z,w)}{\partial w}$ 也是 w 的局部一致有界的函数族[1]．于是重复应用上面的方法，知 $\dfrac{\partial^2 f(z,w)}{\partial w^2}$ 对每一固定的 $w(|w|<r)$ 是 z 的在 $|z|<r$ 解析的函数，而将 $z(|z|<r)$ 看作参数时，$\dfrac{\partial^2 f(z,w)}{\partial w^2}$ 是 w 的 $|w|<s$ 解析的局部一致有界的函数族．如此継續，可知 $\dfrac{\partial^k f(z,w)}{\partial w^k}$ 在 $|z|<r$，$|w|<s$ 中当 z 固定时是 w 的解析函数，当 w 固定时是 z 的解析函数 $(k=1,2,\cdots)$．

对于每一固定的 $z(|z|<r)$，$f(z,w)$ 在 $|w|<s$ 中可展为冪級数

$$f(z,w)=f_0(z)+f_1(z)w+\cdots+f_k(z)w^k+\cdots. \quad (1.4.2)$$

据上面的証明，此級数的系数

$$f_k(z)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k f(z,w)}{\partial w^k}\right]_{w=0}$$

是 $|z|<r$ 中解析的函数．

应用公式(1.2.4)，可得当 $|w|<s$ 时

$$|f_k(z)w^k|<M.$$

又在 $|z|<r$ 中，$f_k(z)$ 可有展式

$$f_k(z)=\sum_{l=0}^{\infty} a_{lk}z^l,$$

---

1) 如果讀者对单复变数解析函数的正規族理論不够熟識，可先参閱后面的 §1.8.

因之在 P 中有

$$|a_{lk}z^l w^k| < M.$$

由此可見，对任一正数 θ，$0<\theta<1$，在閉双圓柱 $|z|\leqslant\theta r$，$|w|\leqslant\theta s$ 中

$$\sum_{l,k=0}^{\infty}|a_{lk}z^l w^k|\leqslant\sum_{l,k=0}^{\infty}M\theta^{l+k}=\frac{M}{(1-\theta)^2}.$$

此乃表示 $f(z, w)$ 在 P 中是 z, w 的解析函数．定理証明．

定理 1.4.3. 若 $f(z, w)$ 在双圓柱 $P=\{|z|<r, |w|<s\}$ 中当 z 固定时是 w 的解析函数，当 w 固定时是 z 的解析函数，則任与正数 $\rho<s$，在 w 平面的圓

$$|w|<\rho$$

中必有一点 a 的邻域

$$|w-a|<\rho_1,\quad |a|+\rho_1<\rho$$

使得 $f(z, w)$ 在 $|z|<r_1$，$|w-a|<\rho_1$ 是有界的，其中 r_1 是小于 r 的任意正数．

証．任取一正数 $r_1<r$，命

$$\mu(w)=\sup_{|z|\leqslant r_1}|f(z, w)|,$$

这对每一 w 在 $|w|<\rho$ 是一有限的非負数．又命 N_k 表 $|w|<\rho$ 中的点使得 $\mu(w)<k$ 者所組成的点集 $(k=1, 2, \cdots)$．我們断言，必有一包含于 $|w|<\rho$ 的非空开集 G 及一正整数 k_0，使得 N_{k_0} 在 G 是到处稠密的．如若不然，在 $|w|<\rho$ 中必有一閉圓 $\bar{C}_1$，其中不包含 N_1 的点，在 C_1 中又有一閉圓 $\bar{C}_2$，其中不包含 N_2 的点，如此継續，我們有一串在 $|w|<\rho$ 中的閉圓

$$\bar{C}_1\supset\bar{C}_2\supset\cdots\supset\bar{C}_k\supset\cdots,$$

每一 $\bar{C}_k$ 不包含 N_k 的点．但所有 C_k 之交是一非空的閉点集，即最少有一点属于所有 $\bar{C}_k$．但若有一点 $w\in\bar{C}_k$ $(k=1, 2, \cdots)$，則 $\mu(w)\geqslant k$ $(k=1, 2, \cdots)$．此乃表示 $\mu(w)$ 不是有限的，也不是負数，矛盾．因此有正整数 k_0 及有一 $|w|<\rho$ 中的开集

$$|w-a|<\rho_1,\quad |a|+\rho_1<\rho,$$

使得 N_{k_0} 在其中是到处稠密的.

由此知,当 $w \in N_{k_0}$, $|z| \leqslant r_1$ 时有

$$|f(z, w)| \leqslant k_0.$$

由于 $f(z, w)$ 对 w 是連續的,此不等式在

$$|z| < r_1, \quad |w - a| < \rho_1$$

仍然成立,定理証明.

最后我們証明

定理 1.4.4. 設 $f(z, w)$ 在双圓柱

$$|z| \leqslant r, \quad |w| \leqslant |w_0| \tag{1.4.3}$$

中当 z 固定时是 w 的解析函数,当 w 固定时是 z 的解析函数. 此外,設在

$$|z| < r, \quad |w| < |w_1| \quad (|w_1| < |w_0|) \tag{1.4.4}$$

中 $|f(z, w)| < M$, 則对任一在 $|w_1|$ 与 $|w_0|$ 之間的 $|w_2|$ 及任一正数 $r_1 < r$, $|f(z, w)|$ 在

$$|z| < r_1, \quad |w| < |w_2|$$

有界(w_0, w_1, w_2 皆为非零的复常数).

証. $f(z, w)$ 对 w 在 $|w| \leqslant |w_0|$ 中可展为

$$f(z, w) = f_0(z) + f_1(z)w + \cdots + f_\nu(z)w^\nu + \cdots,$$

其中 $f_\nu(z)$ 由定理 1.4.2 的証明可知,在 $|z| < r$ 是解析的. 由假設知

$$\left|\frac{f_\nu(z)}{M} w_0^\nu\right| < \left|\frac{w_0}{w_1}\right|^\nu. \tag{1.4.5}$$

我們要証明,任給正数 ε, 有一正数 M_ε, 使得下面不等式:

$$\left|f_\nu(z)\left(\frac{w_0}{e^\varepsilon}\right)^\nu\right| < M_\varepsilon, \quad \nu = 0, 1, 2\cdots \tag{1.4.6}$$

成立.

如果 $f_\nu(z) \equiv 0$, 上式是显然的. 我們只須考慮 $f_\nu(z)$ 不恆为零的情形. 我們取一正数 r_2 介乎 r_1 与 r 之間,使所有不恆等于零的 $f_\nu(z)$ 在圓周 $|z| = r_2$ 上沒有零点. 这是可能的,因为所有这些 $f_\nu(z)$ 在 $|z| < r$ 最多有可数多个零点.

命 P_ν 是 $|z|=r_2$ 上的点集，使得(1.4.5)之左边大于 1 者。这是圆弧上的开集。任与 z_0 点 $(|z_0|=r_2)$，必有一正数 n_{z_0}，当 $\nu>n_{z_0}$ 时，$|f_\nu(z_0)w_0^\nu|<M$，因之 $z_0 \notin P_\nu$。命 $Q_\nu=P_\nu+P_{\nu+1}+\cdots$，則所有 Q_ν 的交集 Q 是空的。根据实变数函数論中熟知的定理[1)]

$$\lim_{\nu\to\infty} \text{mes}\, Q_\nu = \text{mes}\, Q = 0,$$

其中 mes Q_ν 表 Q_ν 的 Lebesque 測度。由此可見

$$\lim_{\nu\to\infty} \text{mes}\, P_\nu = 0. \tag{1.4.7}$$

現在命

$$h_\nu(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\nu}\log\left|\frac{f_\nu(z)}{M}\right| + \log|w_0|, \tag{1.4.8}$$

其中 $z=\rho e^{i\theta}$。它在 $|z|<r_2$ 中除了 $f_\nu(z)$ 的零点外是調和的，而在 $|z_2|<r_2$ 中 $f_\nu(z)$ 最多有有限个零点 $b_1^{(\nu)},\cdots,b_{n_\nu}^{(\nu)}$ ($b_j^{(\nu)}$ 容許相同)。因此函数

$$h_\nu(\rho e^{i\theta}) - \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu}\log r_2\left|\frac{z-b_j^{(\nu)}}{r_2^2-\overline{b_j^{(\nu)}}z}\right|$$

在整个 $|z|<r_2$ 中調和，而与 h_ν 有相同的边界値。

我們用 Poisson 积分在圓 $|z|<r_2$ 內作一非負的調和函数 $g_\nu(\rho e^{i\theta})$，由在圓周的圓弧 P_ν 上等于 $\log\left|\frac{w_0}{w_1}\right|$，而在圓周的其他点为零者所組成。根据(1.4.5)与 P_ν 的定义，在 $|z|=r_2$ 上的点有

$$h_\nu(\rho e^{i\theta}) - \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu}\log r_2\left|\frac{\rho e^{i\theta}-b_j^{(\nu)}}{r_2^2-\overline{b_j^{(\nu)}}\rho e^{i\theta}}\right| \leqslant g_\nu(\rho e^{i\theta}), \tag{1.4.9}$$

而根据調和函数的极値原理知，此不等式在圓 $|z|<r_2$ 內亦成立。

由于

$$h_\nu(\rho e^{i\theta}) \leqslant h_\nu(\rho e^{i\theta}) - \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{n_\nu}\log r_2\left|\frac{\rho e^{i\theta}-b_j^{(\nu)}}{r_2^2-\overline{b_j^{(\nu)}}\rho e^{i\theta}}\right|$$

---

1) 例如見 Carathéodory [1], § 265, 定理 9.

及

$$g_\nu(r_1e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\nu(r_2e^{i\psi}) \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta-\psi)+r_1^2}d\psi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}\int_0^{2\pi} g_\nu(r_2e^{i\psi})\,d\psi =$$

$$= \frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}\cdot\frac{\operatorname{mes} P_\nu}{2\pi}\log\left|\frac{w_0}{w_1}\right|,$$

因而从(1.4.9)得

$$h_\nu(r_1e^{i\theta}) \leqslant \frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}\cdot\frac{\operatorname{mes} P_\nu}{2\pi}\log\left|\frac{w_0}{w_1}\right|.$$

由上式及(1.4.7),(1.4.8)知,任与 $\varepsilon > 0$, 可取 ν 充分大,使得

$$\frac{1}{\nu}\left|\frac{f_\nu(r_1e^{i\theta})}{M}\right| + \log|w_0| < \varepsilon,$$

此即

$$\left|f_\nu(z)\left(\frac{w_0}{e^\varepsilon}\right)^\nu\right| < M$$

在 $z = r_1e^{i\theta}$ 时成立. 根据极大模原理,此不等式在 $|z| \leqslant r_1$ 亦成立. 因此存在正数 M_ε, 使(1.4.6)成立.

对已与的 $|w_2| < |w_0|$, 我們可取 ε 充分小,使得

$$|w_2| < \left|\frac{w_0}{e^\varepsilon}\right|.$$

由此易知

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|f_\nu(z)w_2^\nu| < \frac{M_\varepsilon}{\left(1-\left|\frac{w_2}{w_0}\right|e^\varepsilon\right)}.$$

此乃表示 $f(z, w)$ 在 $|z| < r_1$, $|w| < |w_2|$ 有界. 定理証明.

現在利用以上三个定理証明定理 1.4.1.

任取正数 $r_1 < r$ 及充分小的正数 $\rho(< s)$, 根据定理1.4.3,有一邻域

$$|z| < r_1, \quad |w-a| < \rho_1, \quad (|a| + \rho_1 < \rho)$$

$|f(z, w)|$ 在其中是有界的. 因之据定理 1.4.4, $|f(z, w)|$ 在

$$|z| < r_2(<r_1), \quad |w - a| < s - 2|a|$$

(注意 ρ 是充分小) 是有界的. 又据定理 1.4.2, $f(z, w)$ 在此双圓柱是解析的,故 $f(z, w)$ 在

$$|z| < r_2, \quad |w| < s - 3|a|$$

是解析的. 我們取 ρ 任意之小(即 $|a|$ 任意之小), 因之 $f(z, w)$ 在 $|z| < r_2$, $|w| < s$ 是解析的. 但 r_2 可以任意的接近 r_1, 而 r_1 可任意接近 r. 定理 1.4.1 完全証明.

§ 1.5. n 个复变数的 Hartogs 定理.

定理 1.5.1. 若 $f(z)$, $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 在多圓柱

$$P(a, r) = \{|z_1 - a_1| < r_1, \cdots, |z_n - a_n| < r_n\}$$

中定义, 且当 $z_1, \cdots, z_{k-1}, z_{k+1}, \cdots, z_n$ 固定时是 z_k 的在 $|z_k - a_k| < r_k$ 解析的函数 ($k = 1, \cdots, n$), 则 $f(z)$ 是 n 个复变数 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 的在 $P(a, r)$ 解析的函数.

証. 我們不妨假定 $a = 0$ (即 $a_1 = \cdots = a_n = 0$). 应用归納法, 假設定理在 $n - 1$ 个复变数时为眞. 与証明两个复变数的情形一样,我們分三个步驟进行:

(i) 如果 $f(z)$ 在 $P(r) = P(0, r)$ 中解析且 $|f(z)| < M$, 則 $f(z)$ 在 $P(r)$ 解析.

实际上,由归納法假設, $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 是 $n - 1$ 个复变数 $z_2, \cdots, z_n$ 的在多圓柱 $P^{(1)}(r) = \{|z_2| < r_2, \cdots, |z_n| < r_n\}$ 解析的函数,因此可展为冪級数

$$f(z) = \sum_{\nu_2, \cdots, \nu_n = 0}^{\infty} f_{\nu_2 \cdots \nu_n}(z_1) z_2^{\nu_2} \cdots z_n^{\nu_n}. \tag{1.5.1}$$

应用与定理 1.4.2 一样的方法, 可以証明 $f_{\nu_2 \cdots \nu_n}(z_1)$ 是 z_1 的在 $|z_1| < r_1$ 解析的函数,因此在其中有展式

$$f_{\nu_2 \cdots \nu_n}(z_1) = \sum_{\nu_1 = 0}^{\infty} a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n} z_1^{\nu_1},$$

并且

$$|a_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_n} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \cdots z_n^{\nu_n}| < M.$$

故 $f(z)$ 在 $P(r)$ 是解析的。

(ii) 如果 $f(z)$ 在 $P(r)$ 对每一个变数解析，則必有一包含于其中的开集 $|z_1| < r_1'$, $|z_2 - b_2| < \rho_2, \cdots, |z_n - b_n| < \rho_n$, 使 $f(z)$ 在其中有界，r_1' 是任意小于 r_1 的正数。

我們命

$$\mu(z_2, \cdots, z_n) = \sup_{|z_1|=r_1'} |f(z_1, z_2, \cdots, z_n)|.$$

如定理 1.4.3 一样的証明，在 $P^{(1)}(r)$ 中必有一正整数 k_0 及一包含于 $P^{(1)}$ 的非空开集 G，使得当 $|z_1| < r$ 及 $(z_2, \cdots, z_n) \in G$ 时，$|f(z)| \leqslant k_0$.

(iii) 我們不妨假定 $r_2 = \cdots = r_n = s_0$. 現在証明：若在 $P(r)$ 的閉包中 $f(z)$ 对每一个变数解析，并有一正数 $s_1 < s_0$ 使 $|f(z)|$ 在

$$|z_1| < r_1, \quad |z_2| < s_1, \cdots, \quad |z_n| < s_1 \tag{1.5.2}$$

有界，則对任一介乎 s_1 与 s_0 之間的正数 s 及任一 $r_0 < r_1$, $|f(z)|$ 在

$$|z_1| < r_0, \quad |z_2| < s, \cdots, \quad |z_n| < s \tag{1.5.3}$$

有界。

实际上，由(1.5.1)及(1.2.4)可知，当 $|z_1| < r_1$ 时有

$$\left|\frac{f_{\nu_2\cdots\nu_n}(z_1)}{M} s_0^{\nu_2+\cdots+\nu_n}\right| < \left(\frac{s_0}{s_1}\right)^{\nu_2+\cdots+\nu_n}. \tag{1.5.4}$$

取 r 介乎 r_0 与 r_1 之間，使得在 $|z_1| = r$ 上凡不恆等于零的 $f_{\nu_2\cdots\nu_n}(z_1)$ 是沒有零点的。命 $P_{\nu_2\cdots\nu_n}$ 表 $|z_1| = r$ 上的圓弧，其中的点使上式左边大于 1 者。如定理 1.4.4 一样的証明，任与 $\varepsilon > 0$，最多有有限个 $P_{\nu_2\cdots\nu_n}$ 适合

$$\operatorname{mes} P_{\nu_2\cdots\nu_n} > \varepsilon.$$

如果 $f_{\nu_2\cdots\nu_n}$ 不恆为零，則命

$$h_{\nu_2\cdots\nu_n}(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\nu_2 + \cdots + \nu_n} \log\left|\frac{f_{\nu_2\cdots\nu_n}(\rho e^{i\theta})}{M}\right| + \log s_0,$$

其中 $z_1 = \rho e^{i\theta}$. 这就是在 $|z_1| < r$ 中最多除了有限多个点外是調和的。我們借助 Poisson 积分作一調和函数 $g_{\nu_2\cdots\nu_n}$，在 $P_{\nu_2\cdots\nu_n}$ 上

取值 $\log s_0/s_1$，而在 $|z_1|=r$ 的其他部分为零．如是当 $v_2,\cdots,v_n$ 充分大时

$$g_{v_2\cdots v_n}(re^{i\theta})<\varepsilon. \tag{1.5.6}$$

至于其余的証明，讀者可仿上节之証明不难完成之．

由 Hartogs 定理可得出

定理 1.5.2. 若 $f(z)$ 是在 C^n 的一域 D 定义的函数，对每一点 $a\in D$，$f(z)$ 在一包含于 D 的邻域 $P(a,r)$ 中对每一个变数是解析的，则 $f(z)$ 在 D 解析．

由此定理可見，在域 D 中解析的函数 $f(z)$ 能定义为在 D 中每一点偏导数 $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_1},\cdots,\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_n}$ 存在的函数．

§ 1.6. 可除去的奇异点．

定理 1.6.1. 設 $f(z)$ 是在空間 C^n 的域 D 解析且不恆等于零的函数．命 D 中使 $f(z)=0$ 的点 z 所成的集为 E．若 $g(z)$ 在 $D-E$ 中解析并有界，则 $g(z)$ 在整个域 D 是解析的[1]．

証． (i) 我們先証 $f(z)\equiv z_1$ 而 $D=P(r)=\{|z_1|<r_1,\cdots,|z_n|<r_n\}$ 的特殊情况．

取正数 $r<r_1$ 而命

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|=r}\frac{g(\zeta_1,z_2,\cdots,z_n)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1,$$

这是在

$$|z_1|<r,\ |z_2|<r_2,\cdots,\ |z_n|<r_n$$

中解析的函数．若 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 是上面多圆柱中的点，其中 $|z_1|=\rho\neq 0$ 者，则对任一正数 $\eta<\rho$ 有

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|=r}\frac{g(\zeta_1,z_2,\cdots,z_n)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|=\eta}\frac{g(\zeta_1,z_2,\cdots,z_n)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1.$$

---

1) 严格的說，$g(z)$ 可解析展拓至整个域 D．

由假設 $|g(z)|<M$，有

$$|h(z)-g(z)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|=\eta}\frac{g(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1\right|<$$

$$<\frac{M\eta}{\rho-\eta} \quad (\text{因为 } |\zeta_1-z_1|\geqslant\rho-\eta).$$

由于 η 可以任意小，故得

$$h(z)=g(z).$$

此乃表示 $g(z)$ 在 $P(r)$ 解析.

(ii) 現証 $f(z)\equiv z_1$ 而 D 是任意域的情况. 在 E 的每一点 a 取一多圓柱 $P(a, r)$ 包含于 D 中者. $f(z)$ 在 $P(a, r)$ 必不恆等于零，否則根据定理 1.2.2，它在整个域 D 为零. 这与假設是不符的.

$g(z)$ 在 $P(a, r)$ 中除了 $f(z)=0$ 的 z 点組成的集 E_a 外是解析的并且是有界的，因而从 (i) 可知，$g(z)$ 在 a 点亦解析. 由于 a 可以是 E 中任一点，$g(z)$ 在 D 解析.

(iii) 最后証一般的情况. 命 E_0 为 E 的子集，由 $\frac{\partial f(z)}{\partial z\alpha}$ $(\alpha=1, \cdots, n)$ 中有一不为零的 z 点組成者. 若 $a\in E_0$，不妨假定 $\left[\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}\right]_{z=a}\neq 0$，則我們有包含于 D 的 a 点的連通邻域 $U(a)$ 使得变换

$$z_1^*=f(z), \; z_2^*=z_2-a_2, \cdots, z_n^*=z_n-a_n \qquad (1.6.1)$$

把 $U(a)$ 一一地映为 $z^*=(z_1^*, \cdots, z_n^*)$ 空間的 $z^*=0$ 点的一邻域 U^*（定理 1.3.2），亦即在此邻域有(1.6.1)的逆变換

$$z_1=h(z^*), \; z_2=z_2^*+a_2, \cdots, z_n=z_n^*+a_n.$$

命

$$g^*(z^*)=g(h(z^*), z_2^*+a_2, \cdots, z_n^*+a_n).$$

这是在 U^* 中除了 $z_1^*=0$ 的点集外是解析的并且有界的，据 (ii) 知 $g^*(z^*)$ 在整个邻域 U^* 解析，因而 $g(z)$ 在整个邻域 $U(a)$ 解析. 这証明了 $g(z)$ 在任一点 $a\in E_0$ 解析.

命 E_1 代表 E 中的点集由适合

$$f(z)=0,\ \frac{\partial f(z)}{\partial z_1}=0,\ \cdots,\ \frac{\partial f(z)}{\partial z_n}=0.$$

而 $\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}(\alpha, \beta=1, \cdots, n)$ 最少有一不为零的 z 点组成. 設 $a \in E_1$, 而有一对固定的正整数 α, $\beta(\leqslant n)$ 使 $\left[\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}\right]_{z=a} \neq 0$. 我們有 a 的充分小邻域使得变换

$$z_1^*=z_1-a_1,\ \cdots,\ z_{\alpha-1}^*=z_{\alpha-1}-a_{\alpha-1},\ z_\alpha^*=\frac{\partial f(z)}{\partial z_\beta},$$

$$z_{\alpha+1}^*=z_{\alpha+1}-a_{\alpha+1},\ \cdots,\ z_n^*=z_n-a_n \tag{1.6.2}$$

把此邻域一一地映为 z^* 空間 $z^*=0$ 的一邻域, 并且逆变换

$$z_1=z_1^*+a_1,\ \cdots,\ z_{\alpha-1}=z_{\alpha-1}^*+a_{\alpha+1},\ z_\alpha=h(z^*),$$

$$z_{\alpha+1}=z_{\alpha+1}^*+a_{\alpha+1},\ \cdots,\ z_n=z_n^*-a_n$$

是解析的. 由于 E_1 的点包含于适合方程

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_\beta}=0$$

的 z 点集中, 而此点集在 a 的充分小邻域中的点經变换(1.6.2)映入 z^* 空間适合

$$z_\alpha^*=0$$

的点集. 这就可以如上面一样証明函数

$$g^*(z^*)=g(z_1^*+a_1,\ \cdots,\ h(z^*),\ \cdots,\ z_n^*+a_n)$$

在 $z^*=0$ 点是解析的, 因之 $g(z)$ 在 $z=a$ 点解析.

如此継續, 命 $E_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$ 表 E 中的子集, 由适合

$$f(z)=0,\ \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f(z)}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}=0,\ \nu_1+\cdots+\nu_n \leqslant \nu$$

而 $\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f(z)}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}$, $\nu_1+\cdots+\nu_n=\nu+1$, 最少有一不为零的 z 点組成. 应用上面的方法, 同样可以証明 $g(z)$ 在 E_ν 的点是解

析的.

如果我們能証明 $E = E_0 + E_1 + \cdots + E_\nu + \cdots$, 則定理便証明了. 实际上, 如 $a \in E$, 由于 $f(z)$ 在 D 中不恆等于零, 便知

$$\left[\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f(z)}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}\right]_{z=a} \quad \nu_1 + \cdots + \nu_n = 0, 1, 2, \cdots$$

最少有一不为零, 否則据(1.1.2)知, $f(z)$ 在 a 点的冪級数展式为零, 因而在整个 D 域恆等于零(定理 1.2.2). 这与假設矛盾. 故 a 必属于某一 E_ν. 定理証明.

定理 1.6.2. 設 $\varphi_1(z_1, \cdots, z_n), \cdots, \varphi_n(z_1, \cdots, z_n)$ 在一域 D 中解析, 其函数行列式的 $s(< n)$ 阶子行列式有一不恆等于零, 而所有大于 s 阶的子行列式皆恆等于零, 則对 D 中的任一点 a 使得有一 s 阶子行列式在 a 点不为零者, 必有一邻域 $U(a)$, 使得 $\varphi_\alpha(z)$ 在 $U(a)$ 中适合一函数关系

$$\psi(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z)) \equiv 0,$$

其中 $\psi(w_1, \cdots, w_n)$ 是在 $b_1 = \varphi_1(a), \cdots, b_n = \varphi_n(a)$ 点的邻域 $V(b)$ 中解析的不恆等于零的函数.

証. 如果 $s = 0$, 則所有 φ_α 皆是常数, 定理是显然的.

如果 $s > 0$, 不妨假定 $\left[\det \dfrac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_s)}{\partial(z_1, \cdots, z_s)}\right]_{z=a} \neq 0$.

根据定理 1.3.2 知, 方程組

$$w_\alpha = \varphi_\alpha(z_1, \cdots, z_n), \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

的首 s 个方程有一解

$$z_j = \mu_j(z_{s+1}, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_s), \quad j = 1, \cdots, s.$$

此解在 $z_{s+1}, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_s$ 的空間中 $z_{s+1} = a_{s+1}, \cdots, z_n = a_n, w_1 = b_1, \cdots, w_s = b_s$ 点的一邻域 $V_1(a_{s+1}, \cdots, a_n, b_1, \cdots; b_s)$ 解析. 設此邻域为

$$|z_{s+1} - a_{s+1}| < \delta, \cdots, |z_n - a_n| < \delta,$$

$$|w_1 - b_1| < \delta, \cdots, |w_s - b_s| < \delta.$$

此外 $a_j = \mu_j(a_{s+1}, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_s)$, $j = 1, \cdots, s$.

由此可見,对任一包含于D的多圆柱

$$|z_1 - a_1| < \varepsilon, \cdots, |z_n - a_n| < \varepsilon,$$

我們可取 δ 充分之小,使得 $(z_{s+1}, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_s) \in V_1$ 时,

$$|\mu_1 - a_1| < \varepsilon, \cdots, |\mu_s - a_s| < \varepsilon.$$

我們以 $z_j = \mu_j$ $(j = 1, \cdots, s)$ 代入 $w_{s+1} = \varphi_{s+1}(z)$中,可得

$$w_{s+1} - \varphi^*_{s+1}(z_{s+1}, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_s) = 0,$$

其中

$$\varphi^*_{s+1} \equiv \varphi_{s+1}(\mu_1, \cdots, \mu_s, z_{s+1}, \cdots, z_n)$$

是 V_1 中解析的函数.

φ^*_{s+1} 不包含 $z_{s+1}, \cdots, z_n$, 因为当 $k \geqslant s+1$ 时, 由計算可知

$$\frac{\partial \varphi^*_{s+1}}{\partial z_k} = \frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \varphi_{s+1}}{\partial z_j} \frac{\partial \mu_j}{\partial z_k} =$$

$$= \det \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_{s+1})}{\partial(z_1, \cdots, z_s, z_k)} \Big/ \det \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_s)}{\partial(z_1, \cdots, z_s)} \equiv 0.$$

命

$$\psi(w_1, \cdots, w_n) \equiv w_{s+1} - \varphi^*_{s+1}(w_1, \cdots, w_s),$$

这显然是在 $V(b)$:

$$|w_1 - b_1| < \delta, \cdots, |w_n - b_n| < \delta$$

解析的函数,并且当 $w_1, \cdots, w_n$ 独立变化时不恆等于零. 但当 z 在 a 的充分小邻域 $U(a)$ 中使得

$$|\varphi_\alpha(z) - b_\alpha| < \delta, \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

时,

$$\psi(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z)) \equiv 0.$$

定理証明.

注意: (i) 上面的証明包含了: 当 $z \in U(a)$ 时, 映照 $w_\alpha = \varphi_\alpha(z)$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$ 的象点落在 $V(b)$ 中.

(ii) 上面的定理包含了：如果 $\varphi_\alpha(z)$ $(\alpha=1,\cdots,n)$ 在 D 中解析，其函数行列式恆等于零，則在 D 中必有一点 a 的邻域 $U(a)$，使得在其中有一函数关系 $\psi(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_n(z))\equiv 0$，而 $\psi(w_1,\cdots,w_n)$ 是在 b 点 $(b_\alpha=\varphi_\alpha(a))$ 的邻域 $V(b)$ 解析，但不恆等于零的函数，并且当 $z\in U(a)$ 时，w 点 $(w_\alpha=\varphi_\alpha(z))$ 落在 $V(b)$ 中.

定理 1.6.3. 如果 $\psi(z_1,\cdots,z_n)$ 在一域 D 中解析且非常数，則映照 $w=\psi(z_1,\cdots,z_n)$ 在 w 平面的 D 的象点集合 D_1 是一域.

証. 我們先証 D_1 是一开集，这只要証任一点 $a\in D$ 的象点 $\lambda=\varphi(a)$，必有一开集 $U_1(\lambda)\subset D_1$.

我們可选取适当的坐标使得 $a=0$ 及 $\lambda=0$. 由于 $\psi(z)$ 不是常数，我們可在原点的邻域 U 中展开 $\psi(z)$，設其为

$$\psi(z)=P_k(z)+P_{k+1}(z)+\cdots,\quad k\geqslant 1$$

其中 $P_m(z)$ 是 $z_1,\cdots,z_n$ 的 m 次齐次多項式而 $P_k(z)\not\equiv 0$. 于是在 U 中最少有一点 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ $(b\neq 0)$ 使 $P_k(b)\neq 0$.

我們可作一如下形式的非异綫性变換 T：

$$z_1=b_1z_1^*+\cdots,\ \cdots,\ z_n=b_nz_1^*+\cdots,$$

把 U 一一地映为 U^*，并使得

$$P_k(z)=P_k(b)(z_1^*)^k+\cdots.$$

命

$$\psi^*(z^*)\equiv\psi(z(z^*))=P_k(b)(z_1^*)^k+\cdots,\ P_k(b)\neq 0.$$

由此可見

$$\frac{\partial}{\partial z_1^*}\psi^*(z_1^*,0,\cdots,0)\not\equiv 0.$$

因此有一邻域 Q_{n-1}^*：

$$|z_2^*|<\varepsilon,\ \cdots,\ |z_n^*|<\varepsilon$$

使得在其中任一点 $(a_2^*,\cdots,a_n^*)$ 有

$$\frac{\partial}{\partial z_1^*}\psi^*(z_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*)\not\equiv 0.$$

如若不然，必有一点串 $(a_2^{*(\nu)},\cdots,a_n^{*(\nu)})\to(0,\cdots,0)$，使得

$$\frac{\partial}{\partial z_1^*}\psi^*(z_1^*, a_2^{*(\nu)}, \cdots, a_n^{*(\nu)}) \equiv 0.$$

于是由 $\dfrac{\partial\psi^*}{\partial z_1^*}$ 的連續性知

$$\frac{\partial}{\partial z_1^*}\psi^*(z_1^*, 0, \cdots, 0) =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}\frac{\partial}{\partial z_1^*}\psi^*(z_1^*, a_2^{*(\nu)}, \cdots, a_n^{*(\nu)}) \equiv 0.$$

矛盾．因此我們証明了：对 Q_{n-1}^* 中任一固定的点 $(z_2^*, \cdots, z_n^*)$，$\psi^*(z_1^*, z_2^*, \cdots, z_n^*)$ 对 z_1^* 来說不是常数．

我們取 ε 充分小，使得邻域 Q_n^*：

$$|z_1^*| < \varepsilon, \ |z_2^*| < \varepsilon, \cdots, \ |z_n^*| < \varepsilon$$

包含于 U^* 中．应用单复变数函数論的內点定理知，当 $z_2^*, \cdots, z_n^*$ 固定在 Q_{n-1}^* 中时，映照 $w = \psi(z_1^*, z_2^*, \cdots, z_n^*)$ 把圓 $|z_1^*| < \varepsilon$ 映为 w 平面的一开集 $U_{z_2^*, \cdots, z_n^*}$．命

$$U_1 = \sum_{(z_2^*, \cdots, z_n^*)\in Q_{n-1}^*} U_{z_2^*, \cdots, z_n^*},$$

此即 Q_n^* 对映照 $w = \psi^*(z^*)$ 的在 w 平面的象点集合，显然，仍是 w 平面的开集．由于 Q_n^* 經映照 T 映入 U 內，而

$$w = \psi^*(z^*) = \psi(z(z^*)),$$

故 U_1 包含在 U 的对映照 $w = \psi(z)$ 的象点集合中，因而包含于 D_1 中．所以 D_1 是开集．

其次証明 D_1 是連通的．任两点 $\alpha, \beta \in D_1$，最少分别有一原象点 $a, b \in D$，即 $\alpha = \psi(a), \beta = \psi(b)$．由于 a 与 b 可在域 D 中以一曲綫 $z_\nu = z_\nu(t)$ $(\nu = 1, \cdots, n;\ 0 \leqslant t \leqslant t_0)$ 相联，因之 α 与 β 点亦能以一在 D_1 中的曲綫 $w = \psi(z(t))$ 相联．定理証明．

定理 1.6.4. 設 $n < m$．解析映照 T：

$$w_1 = \varphi_1(z_1, \cdots, z_n), \cdots, w_m = \varphi_m(z_1, \cdots, z_n)$$

把空間 C^n 的一域 D 一一映入空間 C^m 的一域 D^* 內．D 的象点集合命之为 E^*．若 $g(w) = g(w_1, \cdots, w_m)$ 在 $D^* - E^*$ 中解析

并有界，则 $g(w)$ 在整个 D^* 中解析.

証. (i) 先考虑 $n=1$ 的情形. 如果 $\varphi_1(z_1)=c_1=$ 常数，则 D 对变换 T 的象点 E^* 包含于 D^* 中的 $w_1=c_1$ 点集中. $g(w)$ 在 D^* 中最多除去 $w_1-c_1=0$ 的点外是解析的并且 $|g(w)|\leqslant M$，因之在 D^* 解析.

如果 $\varphi_1(z_1)$ 非常数，而 $a_1\in D$. 命

$$a_1^*=\varphi_1(a_1),\ \cdots,\ a_m^*=\varphi_m(a_1),$$

则 $a^*=(a_1^*,\cdots,a_m^*)\in E^*$. 我們可設

$$\begin{aligned} w_1-a_1^* &= \varphi_1(z_1)-\varphi_1(a_1)= \\ &= \lambda(z_1-a_1)^k\{1+\mu(z_1-a_1)+\cdots\}, \end{aligned}$$

其中 $\lambda\neq 0$ 而 k 为正整数，则当 $|w_1-a_1^*|$ 充分小时，有

$$z_1=a_1+\mu_1(w_1-a_1^*)^{\frac{1}{k}}+\mu_2(w_1-a_1^*)^{\frac{2}{k}}+\cdots,\quad \mu_1\neq 0.$$

此乃表示 T 之逆映照是連續的，亦即 T 是一个把 D 映为 E^* 的拓扑映照. 由于 $\dfrac{d\varphi_1(z_1)}{dz_1}\neq 0$，$\dfrac{d\varphi_1(z_1)}{dz_1}$ 在 D 中最多有可数多个孤立的零点 $\{a_1^{(k)}\}_{k=1,2,\cdots}$，对任一 $a_1\in D\dot{-}\{a_1^{(k)}\}$，有 $\left[\dfrac{d\varphi_1(z_1)}{dz_1}\right]_{z_1=a_1}\neq 0$，因此从 $w_1=\varphi_1(z_1)$ 在 a_1 的邻域中可解出 $z_1=\psi_1(w_1)$，这是在 $w_1=a_1^*$ 的 w_1 平面的邻域中解析的函数，并且 $a_1=\psi_1(a_1^*)$. 以之代入 $\varphi_2(z_1),\cdots,\varphi_m(z_1)$（注意 $m>1$），我們有

$$w_2-\varphi_2(\psi_1(w_1))=0,\ \cdots,\ w_m-\varphi_m(\psi_1(w_1))=0.$$

此乃表示在 $a^*=(a_1^*,\cdots,a_m^*)$ 的充分小邻域 $U^*(a^*)$ 中，E^* 的点是由适合上面的方程的 w 点定义. 但在此邻域 E^* 的点，显然的包含于适合下面方程的 w 点集中：

$$w_2-\varphi_2(\psi_1(w_1))=0. \tag{1.6.3}$$

$g(w)$ 在 $U^*(a^*)$ 的最多除了由 (1.6.3) 定义的点集外解析并且其絕对值 $\leqslant M$，因之 $g(w)$ 在 $U^*(a^*)$ 中解析，其絕对值在此邻域中亦 $\leqslant M$（定理 1.6.1）.

由于 a_1 可以是 $D-\{a_1^{(k)}\}$ 的任一点，故我們証明了 $g(w)$ 在 D^* 中除了 $a_1^{(k)}$ 的象点 $a^{*(k)}=Ta_1^{(k)}$ 外是解析的，并且絕对值 $\leqslant M$.

由于 T 是映 D 为 E^* 的拓扑映照，$a_1^{(k)}$ 为 D 的孤立点，$a^{*(k)}$ 也是 E^* 的，亦即 D^* 的孤立点．换言之，任一 $a^{*(k)}$ 有一邻域 $U^*(a^{*(k)}) \subset D^*$ 不包含其他的 $a^{*(l)}$ 点．在此邻域中，$g(w)$ 除去 $a^{*(k)}$ 外解析并有界，因之在整个 $U^*(a^{*(k)})$ 解析．这就証明了 $g(w)$ 在整个 D^* 中解析．

(ii) 应用归納法，我們假設定理在 $(k-1)$ 个 $(1<k\leqslant n)$ 复变数时成立，現在要証明在 k 个复变数 $z_1, \cdots, z_k$ 时亦成立．此时映照 T：

$$w_1=\varphi_1(z_1, \cdots, z_k), \cdots, w_m=\varphi_m(z_1, \cdots, z_k)$$

的前面 k 个函数的函数行列式命之为

$$f(z_1, \cdots, z_k)\left(\equiv \det\frac{\partial(w_1, \cdots, w_k)}{\partial(z_1, \cdots, z_k)}\right).$$

我們分下面几种情形討論之：

(iia) 如果 $f(z_1, \cdots, z_k)\not\equiv 0$．

設 $a\in D$，$a^*=Ta$，而 $f(a_1, \cdots, a_k)\neq 0$，我們可解出

$$z_1=\psi_1(w_1, \cdots, w_k), \cdots, z_k=\psi_k(w_1, \cdots, w_k).$$

以之代入其他的 $\varphi_a(z_1, \cdots, z_k)$（注意 $m>k$），則在 a^* 的充分小邻域 $U^*(a^*)$ 中，E^* 的点由下面的方程定义：

$$w_{k+1}-\varphi_{k+1}(\psi_1(w_1, \cdots, w_k), \cdots, \psi_k(w_1, \cdots, w_k))=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_m-\varphi_m(\psi_1(w_1, \cdots, w_k), \cdots, \psi_k(w_1, \cdots, w_k))=0.$$

因之 $g(w)$ 在 $U^*(a^*)$ 中最多除去适合方程

$$w_{k+1}-\varphi_{k+1}(\psi_1(w_1, \cdots, w_k), \cdots, \psi_k(w_1, \cdots, w_k))=0$$

之点集外是解析的并且其絕对值 $\leqslant M$．因之在 $U^*(a^*)$ 解析且其絕对值 $\leqslant M$．

現在把域 D 的点分为点集 $D_0, D_1, \cdots, D_\nu, \cdots$，其中 D_0 由使 $f(z_1, \cdots, z_k)\neq 0$ 的 z 点組成；D_ν 由当 $\nu_1+\cdots+\nu_k\leqslant\nu-1$ 时 $\dfrac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_k}f(z_1, \cdots, z_k)}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_k^{\nu_k}}$ 为零，而当 $\nu_1+\cdots+\nu_k=\nu$ 时最少有一使 $\dfrac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_k}f}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_k^{\nu_k}}$ $(\nu=0, 1, 2, \cdots)$ 不为零的 $(z_1, \cdots, z_k)$ 点組

成. 对D的任一点a，所有

$$\left[\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_k}f(z_1,\cdots,z_k)}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_k^{\nu_k}}\right]_{z=a},\quad \nu_1,\cdots,\nu_k=0,1,2,\cdots$$

之值不能全部为零，否则f在a的邻域的幂級数展式恆等于零，这与f不恆为零的假設矛盾. 因此a必属于某一D_ν，此卽$D=D_0+D_1+\cdots+D_\nu+\cdots$.

命$E_\nu^*=TD_\nu$，則$E^*=E_0^*+E_1^*+\cdots+E_\nu^*+\cdots$.

上面已証明，$g(w)$在$E_0^*=TD_0$的点亦解析并絕对值$\leqslant M$. 假設我們已証$g(w)$在D^*-E^*中再加上在$E_0^*,E_1^*,\cdots,E_\nu^*$的点上仍是解析并絕对值$\leqslant M$，現在証明对任一点$a^*\in E_{\nu+1}^*$，$g(w)$亦解析并絕对值$\leqslant M$.

如果a为a^*的在D中的原象点，則$a\in D_{\nu+1}$，此卽a点适合下面的方程

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_k}f(z_1,\cdots,z_k)}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_k^{\nu_k}}=0,\ \nu_1+\cdots+\nu_k=l,$$

$$l=0,1,\cdots,\nu.$$

$\left[\frac{\partial^{\nu+1}f(z)}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_k^{\nu_k}}\right]_{z=a}$ 中最少有一不为零，設

$$\left[\frac{\partial^{\nu+1}f(z)}{\partial z_1^{\mu_1+1}\partial z_2^{\mu_2}\cdots\partial z_k^{\mu_k}}\right]_{z=a}\neq 0,$$

其中$\mu_1,\cdots,\mu_k$为一組固定的非負整数适合$\mu_1+\cdots+\mu_k=\nu$者.

显然点集$D_{\nu+1}$包含于适合下面方程

$$\varphi(z_1,\cdots,z_k)\equiv\frac{\partial^{\mu_1+\cdots+\mu_k}f(z_1,\cdots,z_k)}{\partial z_1^{\mu_1}\cdots\partial z_k^{\mu_k}}=0$$

的点集中. 由于$\left[\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_1}\right]_{z=a}\neq 0$，我們可解出

$$z_1=\psi(z_2,\cdots,z_k).$$

这是在邻域P_{k-1}:

$$|z_2-a_2|<\varepsilon,\cdots,|z_k-a_k|<\varepsilon$$

中解析的函数$[a_1=\psi(a_2,\cdots,a_n)]$，并且在此邻域适合

$$\varphi(\psi(z_2,\cdots,z_n),z_2,\cdots,z_n)=0.$$

我們可取 ε 充分小，使得在 D 中存在一邻域

$$U(a): z_1 \in U_1(a_1),\ |z_2 - a_2| < \varepsilon, \cdots, |z_n - a_n| < \varepsilon,$$

其中 $U_1(a_1)$ 是 z_1 平面中 a_1 点的邻域[1]. 而在 $U(a)$ 中，$D_{\nu+1}$ 的点包含于由 $z_1 = \psi(z_2, \cdots, z_k)$, $(z_2, \cdots, z_k) \in P_{k-1}$ 表示的点.

命 $U^* = TU(a)$. 由于 T 是映 D 入 D^* 的一一映照，根据拓扑学熟知的定理[2]，T 是映 D 为 $E^* = TD$ 的拓扑映照（E^* 的拓扑为对于 D^* 的相对拓扑）. 由于 $U(a)$ 是 D 的开集，U^* 必为 E^* 的开集，即有一 D^* 的开集 V_1，使得 $U^* = E^* \cap V_1$. 从上面的証明知，$g(w)$ 在 V_1 中最多除去映照 T_1:

$$w_1 = \varphi_1(\psi(z_2, \cdots, z_n), z_2, \cdots, z_k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_m = \varphi_m(\psi(z_2, \cdots, z_n), z_2, \cdots, z_k),\quad (z_2, \cdots, z_k) \in P_{k-1}$$

的 P_{k-1} 的象点集合外是解析并有界的. 映照 T_1 必是一一的，因为如果 $(b_2, \cdots, b_k)$ 与 $(c_2, \cdots, c_k)$ 是 P_{k-1} 的不同的点，則 $(\psi(b_2, \cdots, b_k), b_2, \cdots, b_k)$ 与 $(\psi(c_2, \cdots, c_k), c_2, \cdots, c_k)$ 是 $U(a)$ 中不同的点，因此經映照 T 映为不同的点. 故 T_1 把不同的点映为不同的点.

应用归納法假設，$g(w)$ 在整个 V_1 中解析，此乃表示 $g(w)$ 在 $E^*_{\nu+1}$ 的点亦解析. 容易証明，$D_{\nu+1}$ 的点是 D_ν 的聚点，因之 $E^*_{\nu+1}$ 的点是 E^*_ν 的聚点. 由 $g(w)$ 的連續性知，其絕对值在 $E^*_{\nu+1}$ 亦 $\leqslant M$. 至此我們証明了 $g(w)$ 可在整个 D^* 域解析.

(iib) $f(z_1, \cdots, z_k) \equiv 0$ 的情形.

如果所有的 $\dfrac{\partial \varphi_\alpha(z)}{\partial z_\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \cdots, k)$ 皆恆等于零，則 $\varphi_1(z) = c_1$ 是常数，而 E^* 包含于解析超平面 $w_1 - c_1 = 0$ 中，定理显然成立. 故我們不妨假定 $f(z) \equiv \det \dfrac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)}{\partial(z_1, \cdots, z_k)}$ 有一

---

1) 如果 ψ 是常数，即 $\psi = a_1$，我們取 $U_1(a_1) = \{|z_1 - a_1| < \varepsilon\}$，$\varepsilon$ 充分小便可. 如果 ψ 非常数，我們取 $U_1(a_1)$ 为映照 $z_1 = \psi(z_2, \cdots, z_k)$ 在 z_1 平面的 P_{k-1} 的象点集合，根据定理 1.6.3，这是 z_1 平面的域.

2) 参閱定理 1.6.6 的証明中的註.

$s(0 < s < k)$ 阶子行列式 $h(z_1, \cdots, z_k) = \det \dfrac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_s)}{\partial(z_1, \cdots, z_s)}$ 不恆等于零,而所有 $s+1$ 阶子行列式皆恆等于零.

現在我們把D分解为和集 $D_0 + D_1 + \cdots + D_\nu + \cdots$, 其中 D_0 是D中使 $h(z) \neq 0$ 的 z 所成的点集, D_ν 是D中的 z 点使得

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_k} h(z)}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_k^{\nu_k}}$$

当 $\nu_1 + \cdots + \nu_k \leqslant \nu - 1$ 时为零, 而当 $\nu_1 + \cdots + \nu_k = \nu$ 时最少有一不为零 $(\nu = 1, 2, \cdots)$ 者. 相应的把 E^* 分解为 $E_0^* + E_1^* + \cdots + E_\nu^* + \cdots$, 其中 $E_\nu^* = TD_\nu$.

如果 $a \in D_0$, 根据定理 1.6.2 知, 在 a 的邻域 $U(a)$ 中有一函数关系

$$\psi(\varphi_1(z_1, \cdots, z_k), \cdots, \psi_k(z_1, \cdots, z_k)) \equiv 0,$$

其中 $\psi(w_1, \cdots, w_k)$ 是在 $a^* = Ta$ 的邻域 $V^*(a^*)$ 中解析而不恆等于零的函数,并且我們可取 $U(a)$ 充分之小, 使得 $U^* = TU(a) \subset V^*(a^*)$. 由于$T$是一一的, 必存在包含于 $V^*(a^*)$ 的开集 V_1, 使 $U^* = E^* \cap V_1$. 此乃表示在 V_1 中 E_0^* 的点必适合方程

$$\psi(w_1, \cdots, w_k) = 0.$$

根据定理 1.6.1 知, $g(w)$ 在 E_0^* 亦解析并絕对值 $\leqslant M$.

如果 $a^* \in E_\nu^* (\nu = 1, 2, \cdots)$, 則我們可用 (iia) 中的方法,消去一个 z 的变数而应用归納法假設証明 $g(w)$ 在 E_ν^* 亦解析且絕对值 $\leqslant M$. 由此得知, $g(w)$ 可在整个 D^* 域解析. 定理完全証明.

定理 1.6.5. 設 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 是在空間 C^n 的一域 D 内不恆等于零的解析函数,解析映照 T:

$$w_1 = \varphi_1(z), \cdots, w_m = \varphi_m(z) \ (n \leqslant m)$$

把D一一地映入空間 C^m 的一域 D^* 之內. 命点集 $E = \{z \mid z \in D, f(z) = 0\}$, 而 E^* 为 E 的象点, 即 $E^* = TE$. 若 $g(w) = g(w_1, \cdots, w_m)$ 在除去 E^* 外的 D^* 中解析并有界, 則 $g(w)$ 在整个 D^* 域解析.

証. 如果 $m > n$, 定理是显然的, 因为 E^* 包含于整个域 D

对 T 的象点集合中，而此定理是定理 1.6.4 的显然推論. 所以我們只要証 $m = n$ 的情形.

我們把点集 E 分解为 $E = E_0 + E_1 + E_2 + \cdots$, 其中 E_ν 的点 z 是使得

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f(z)}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}$$

当 $\nu_1 + \cdots + \nu_n \leqslant \nu$ 时为零而当 $\nu_1 + \cdots + \nu_n = \nu + 1$ 时最少有一不为零 $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ 者. 又命

$$E^* = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu^*, E_\nu^* = T E_\nu.$$

如果 $a \in E_0$, 則 a 点适合

$$f(z) = 0,$$

而 $\left[\frac{\partial f(z)}{\partial z_\alpha}\right]_{z=a}$ $(\alpha=1, \cdots, n)$ 中最少有一个不为零. 若 $\left[\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}\right]_{z=a}$ $\neq 0$, 則可解出

$$z_1 = \psi(z_2, \cdots, z_n),$$

其中 $\psi(z_2, \cdots, z_n)$ 在 P_{n-1}:

$$|z_2 - a_2| < \varepsilon, \cdots, |z_n - a_n| < \varepsilon$$

中解析，而在 a 有一邻域 $U(a) = \{z_1 \in U_1(a_1), (z_2, \cdots, z_n) \in P_{n-1}\}$ 使得 E_0 在 $U(a)$ 的点能表为 $z_1 = \psi(z_2, \cdots, z_n)$, $(z_2, \cdots, z_n) \in P_{n-1}$. 以之代入 T 的映照函数中，我們得一映照 T_1:

$$w_1 = \varphi_1(\psi(z_2, \cdots, z_n), z_2, \cdots, z_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_m = \varphi_m(\psi(z_2, \cdots, z_n), z_2, \cdots, z_n),$$

把 P_{n-1} 一一地映入 $U^* = TU$ 中. 应用定理 1.6.4 可知, $g(w)$ 在 U^* 解析, 特别在 $a^* = Ta \in E_0^*$ 点解析. 同法可証 $g(w)$ 在 E_1^*, E_2^*, $\cdots$ 亦解析. 定理証明.

定理 1.6.6. 設 $\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z)$ 在有界域 D 解析. 若变换 T:

$$w_1 = \varphi_1(z), \cdots, w_n = \varphi_n(z)$$

把有界域 D 一一地映为一点集 D^*，则变换 T 的函数行列式在 D 中的任一点皆不为零.

証. 应用拓扑学熟知的定理[1]，T 必定是一拓扑映照，而 D^* 是一域.

我們先証 T 的函数行列式不能恆等于零. 如若不然，根据定理 1.6.2，在 D 的一邻域 $U(a)$ 中有一函数关系

$$\psi(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z)) \equiv 0,$$

而 $\psi(w_1, \cdots, w_n)$ 在 D^* 的一邻域 $V^*(a^*)$ $(a^* = Ta)$ 中解析但不恆等于零，并且 $V^*(a^*) \supset U^*(a^*) = TU(a)$. 于是最少有一 $(w_1^{(0)}, \cdots, w_n^{(0)}) \in U^*(a^*)$，使得 $\psi(w^{(0)}) \neq 0$，即 $w^{(0)}$ 沒有原象点，矛盾. 因为 T 限制在 $U(a)$ 中仍是把 $U(a)$ 映为 $U^*(a^*)$ 的拓扑映照.

今設变换 T 的逆变换为

$$z_1 = \psi_1(w), \cdots, z_n = \psi_n(w).$$

根据定理 1.3.2 知，在域 D^* 中任一点 $a^* = Ta$，如果

$$\left[\det \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}\right]_{z=a} \neq 0,$$

则 $\psi_j(w)$ $(j = 1, \cdots, n)$ 在 a^* 点解析；换言之，每一 $\psi_j(w)$ 在域 D^* 中除了 D 中的点集

$$f(z) \equiv \det \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)} = 0$$

对变换 T 的象点集合外是解析的并且是有界的（因为 D 是有界域）. 因之根据定理 1.6.5，$\psi_j(w)$ 在整个域 D^* 解析. 故对任一点 $z \in D$ 有

$$\det \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)} \det \frac{\partial(\psi_1, \cdots, \psi_n)}{\partial(w_1, \cdots, w_n)} = 1.$$

由此知 $\det \dfrac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}$ 在 D 中恆不为零，定理証明.

---

1) 此即 Brouwer 内点定理，参閱 Голузин [1]，第五章 § 7，251—260 頁，或 Болтянский [1]，I § 1，1—16 頁.

值得注意的是，此定理在实变数时不能成立. 例如变换 $u = x^3$ 把綫段 $-r < x < +r$ 一一地(且拓扑地)映为綫段 $-r^3 < u < +r^3$, 但

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=0} = 0.$$

§ 1.7. 連續收斂. 設 A 是 C^n 中的一有界点集，即有一正数 M 使得任一点 $z \in A$ 适合

$$|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < M;$$

又設 $f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), \cdots, f^{(k)}(z), \cdots$ 是一串在 A 定义的复值函数. 若 $z^{(0)}$ 是 A 的聚点，对任一在 A 的收斂于 $z^{(0)}$ 的点串 $z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots$, 数值串 $f^{(1)}(z^{(1)}), f^{(2)}(z^{(2)}), \cdots$ 皆收斂，于是函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 称为在 $z^{(0)}$ 連續收斂. $f^{(k)}(z)$ 并未假定其为解析的，甚至亦未假定其为連續，而 $z^{(0)}$ 可以是也可以不是 A 的点. 显然，連續收斂的极限值 $\lim\limits_{k\to\infty} f^{(k)}(z^{(k)})$ 与收斂点串 $\{z^{(k)}\}$ 的选择无关. 此外，如果 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 $z^{(0)}$ 点連續收斂，則其任一子串亦在 $z^{(0)}$ 連續收斂.

定理 1.7.1. 設 $\{f_1^{(k)}(z)\}, \cdots, \{f_l^{(k)}(z)\}$ 为一組在 A 定义的函数串而在 $z^{(0)}$ 点連續收斂者，它們的极限值分別为 $w_1^{(0)}, \cdots, w_l^{(0)}$. 又設 z 在 A 变化时，函数值 $w_1 = f_1^{(k)}(z), \cdots, w_l = f_l^{(k)}(z)$ 的集合，包含于 l 个复变数 $w = (w_1, \cdots, w_l)$ 的空間 C^l 的一有界点集 B 内(对所有 k 皆然)，并且 $w^{(0)} = (w_1^{(0)}, \cdots, w_l^{(0)})$ 是 B 的聚点. 若 $\{\varphi^{(k)}(w)\}$ 是在 B 定义的在 $w^{(0)}$ 連續收斂的函数串，則函数串

$$F^{(k)}(z) = \varphi^{(k)}(f_1^{(k)}(z), \cdots, f_l^{(k)}(z)), \quad k = 1, 2, \cdots$$

在 $z^{(0)}$ 連續收斂.

証. 設 $z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots$ 为任一在 A 中收斂于 $z^{(0)}$ 的点串. 命 $w^{(k)} = (w_1^{(k)}, \cdots, w_l^{(k)}), w_j^{(k)} = f_j^{(k)}(z^{(k)})$ $(j = 1, \cdots, l)$, 由假設知 $w^{(k)}$ 在 B 中. 由于 $f_j^{(k)}(z^{(k)})$ 收斂于 $w_j^{(0)} (j = 1, \cdots, l)$, 故 $w^{(k)}$ 收斂于 $w^{(0)}$, 而 $w^{(0)}$ 是 B 的聚点，故极限

$$\lim_{k\to\infty} F^{(k)}(z^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \varphi^{(k)}(w_1^{(k)}, \cdots, w_l^{(k)})$$

存在，即 $\{F^{(k)}(z)\}$ 在 $z^{(0)}$ 連續收斂. 定理証明.

在 C^n 中，以 $z^{(0)}$ 点为中心，以正数 r 为半径的超球即开集 $S(z^{(0)}, r)$:

$$|z_1 - z_1^{(0)}|^2 + \cdots + |z_n - z_n^{(0)}|^2 < r^2.$$

設 $\{f^{(k)}(z)\}$ 是在点集 A 定义的函数串，$z^{(0)}$ 是 A 的聚点，$S\left(z^{(0)}, \frac{1}{m}\right)(m = 1, 2, \cdots)$ 是一串超球. 命

$$S_{mk} = \sup_{z^{(1)}, z^{(2)} \in A \cap S\left(z^{(0)}, \frac{1}{m}\right)} |f^{(k)}(z^{(1)}) - f^{(k)}(z^{(2)})| \quad (1.7.1)$$

及

$$\sigma_m = \overline{\lim_{k\to\infty}} S_{mk}. \quad (1.7.2)$$

由于 $S\left(z^{(0)}, \frac{1}{m}\right) \supset S\left(z^{(0)}, \frac{1}{m+1}\right)$, 故

$$S_{mk} \geqslant S_{m+1, k},$$

因此

$$\sigma_m \geqslant \sigma_{m+1},$$

于是有极限

$$\sigma(z^{(0)}) = \lim_{m\to\infty} \sigma_m. \quad (1.7.3)$$

$\sigma(z^{(0)})$ 称为函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 $z^{(0)}$ 的极限摆幅.

定理 1.7.2. 設函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在点集 A 定义，$z^{(0)}$ 是 A 的聚点且属于 A. 此函数串在 $z^{(0)}$ 連續收斂的充要条件为 $\sigma(z^{(0)}) = 0$ 及存在极限值 $\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(z^{(0)})$.

証. (i) 必要条件. 若函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 $z^{(0)}$ 連續收斂，我們取点串 $z^{(0)}, z^{(0)}, \cdots$, 便知极限值 $\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(z^{(0)})$ 存在.

現証若 $\sigma(z^{(0)}) > 0$, 則 $\{f^{(k)}(z)\}$ 不能在 $z^{(0)}$ 連續收斂.

由(1.7.2)的定义知，必有正整数 k_m 使

$$S_{mk_m} > \frac{\sigma_m}{2} \geqslant \frac{\sigma(z^{(0)})}{2}.$$

取 $k_1 < k_2 < \cdots$. 由(1.7.1)知必存在一对点

$$a^{(m)}, b^{(m)} \in A \cap S\left(z^{(0)}, \frac{1}{m}\right)$$

使

$$|f^{(k_m)}(a^{(m)})-f^{(k_m)}(b^{(m)})| > \frac{\sigma(z^{(0)})}{2}. \qquad (1.7.4)$$

易見有

$$\lim_{m\to\infty} a^{(m)} = \lim_{m\to\infty} b^{(m)} = z^{(0)}.$$

若

$$\{f^{(k_m)}(a^{(m)})\} \text{ 与 } \{f^{(k_m)}(b^{(m)})\}$$

有一不收斂，則 $\{f^{(k)}(z^{(0)})\}$ 在 $z^{(0)}$ 非連續收斂．若两者皆收斂，則由 (1.7.4) 知，它們的极限值不相等，故函数串亦非在 $z^{(0)}$ 連續收斂．这与假設矛盾，故必須 $\sigma(z^{(0)}) = 0$.

(ii) 充分条件．如果 $\sigma(z^{(0)}) = 0$，則任与 $\varepsilon > 0$，由 (1.7.3) 知，必存在一正整数 m_0，当 $m \geqslant m_0$ 时

$$\sigma_m < \frac{\varepsilon}{6}.$$

現在把 m 固定．由假設知必有一正数 k_1，当 $p \geqslant k_1$, $q \geqslant k_1$ 时

$$|f^{(p)}(z^{(0)}) - f^{(q)}(z^{(0)})| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1.7.5)$$

由(1.7.2)知，有正整数 k_2，当 $k \geqslant k_2$ 时

$$S_{mk} < \sigma_m + \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

任取 A 中一收斂点串 $z^{(k)} \to z^{(0)}$，則有一正整数 k_3，当 $k \geqslant k_3$ 时，$z^{(k)}$ 在 $A \cap S\left(z^{(0)}, \frac{1}{m}\right)$ 中.

現取 $p, q \geqslant \max\{k_1, k_2, k_3\}$，則

$$|f^{(p)}(z^{(p)}) - f^{(q)}(z^{(q)})| \leqslant |f^{(p)}(z^{(p)}) - f^{(p)}(z^{(0)})| + \\ + |f^{(p)}(z^{(0)}) - f^{(q)}(z^{(0)})| + |f^{(q)}(z^{(0)}) - f^{(q)}(z^{(q)})| < \varepsilon.$$

此乃表示 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 $z^{(0)}$ 連續收斂．定理証明．

由此定理立得

定理 1.7.3. 如果函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 A 的聚点 $z^{(0)}$ 有 $\sigma(z^{(0)}) = 0$，且在 $z^{(0)}$ 的任一邻域中必有一 A 的点使 $f^{(k)}(z)$ 收斂，則此函数串在 $z^{(0)}$ 連續收斂.

实际上，在前一定理的証明的第(ii)部分中，从式(1.7.5)开始把 $z^{(0)}$ 点改换为使 $f^{(k)}(z)$ 收斂的 $A\cap S\left(z^{(0)},\dfrac{1}{m}\right)$ 中的点，则以后的推論仍然正确。

由此可見，若 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 A 的一子集 B_1 收斂，其极限函数为

$$f(z)=\lim_{k\to\infty}f^{(k)}(z),\quad z\in B_1;$$

此外，若 B_2 为 B_1 的一些聚点所成的点集，且当 $z^{(0)}\in B_2$ 时 $\sigma(z^{(0)})\doteq=0$，则 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 B_2 的点連續收斂，而 $f(z)$ 的定义区域可推广到 $B=B_1+B_2$，并且可导出下面的定理。

定理 1.7.4. 在上面的假設下，$f(z)$ 在 B_2 上連續。

証. (i) 如果 $\{z^{(k)}\}$ 为 B_1 中的点串收斂于 $z^{(0)}\in B_2$ 者. 由假設知，对任一 $z^{(m)}$，有一正整数 K_m，当 $k_m>K_m$ 时；

$$|f^{(k_m)}(z^{(m)})-f(z^{(m)})|<\frac{1}{m}. \tag{1.7.6}$$

取 $k_1<k_2<\cdots$. 由于 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 B_2 連續收斂(定理 1.7.3)，故其子串 $\{f^{(k_m)}(z)\}$ 亦然，因此

$$\lim_{m\to\infty}|f^{(k_m)}(z^{(m)})-f(z^{(0)})|=0.$$

由此得

$$\begin{aligned}|f(z^{(m)})-f(z^{(0)})|&\leqslant|f(z^{(m)})-f^{(k_m)}(z^{(m)})|+\\&\quad+|f^{(k_m)}(z^{(m)})-f(z^{(0)})|<\\&<\frac{1}{m}+|f^{(k_m)}(z^{(m)})-f(z^{(0)})|,\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{m\to\infty}|f(z^{(m)})-f(z^{(0)})|=0.$$

(ii) 如果 $\{a^{(m)}\}$ 为 B_2 中的点串收斂于 $z^0\in B_2$ 者. 我們可在 A 中找一点串 $b^{(1)},b^{(2)},\cdots$ 及一串自然数 $k_1<k_2<\cdots$，使得对每一点 $a^{(m)}$ 有

$$|f^{(k_m)}(b^{(m)})-f(a^{(m)})|<\frac{1}{m},\quad b^{(m)}\in S\left(a^{(m)},\frac{1}{m}\right). \tag{1.7.7}$$

后者包含了 $b^{(m)} \to z^{(0)}$.

由

$$|f(a^{(m)}) - f(z^{(0)})| \leqslant$$
$$\leqslant |f(a^{(m)}) - f^{(k_m)}(b^{(m)})| + |f^{(k_m)}(b^{(m)}) - f(z^{(0)})| <$$
$$< \frac{1}{m} + |f^{(k_m)}(b^{(m)}) - f(z^{(0)})|$$

知

$$\lim_{m\to\infty} |f(a^{(m)}) - f(z^{(0)})| = 0.$$

(iii) 如果 $\{c^{(m)}\}$ 为 B 中任一点串收斂于 $z^{(0)} \in B_2$ 者. 我們不再討論 $\{c^{(m)}\}$ 只有有限个 B_1 的或有限个 B_2 的点的情形, 而假定 $\{c^{(m)}\}$ 可分为两个无穷的子串 $\{c^{(k_j)}\}$ (在 B_1 中) 及 $\{c^{(l_j)}\}$ (在 B_2 中). 任与 $\varepsilon > 0$, 由 (i) 与 (ii) 知,必有 k_j 与 l_j 充分大,使得

$$|f(c^{(k_j)}) - f(z^{(0)})| < \varepsilon, \quad |f(c^{(l_j)}) - f(z^{(0)})| < \varepsilon.$$

因之当 m 充分大时,恆有

$$|f(c^{(m)}) - f(z^{(0)})| < \varepsilon.$$

此乃表示 $f(z)$ 在 B_2 連續. 定理証明.

定理 1.7.5. 如果 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在一緊致点集 $\overline{D}$ 为連續收斂, 并且 $\overline{D}$ 的每一点都是 $\overline{D}$ 的聚点,則在 $\overline{D}$ 一致收斂为一連續函数; 反之亦然.

証. (i) 若 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 $\overline{D}$ 連續收斂,則可命

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(z), \quad z \in \overline{D}.$$

根据定理 1.7.4, 这是在 $\overline{D}$ 連續的函数.

假定此函数串非在 $\overline{D}$ 一致收斂, 則任与 $\varepsilon > 0$, 必有一点串 $z^{(m)} \in \overline{D}$ 及一串自然数 $k_1 < k_2 < \cdots$, 使得

$$|f^{(k_m)}(z^{(m)}) - f(z^{(m)})| > \varepsilon. \tag{1.7.8}$$

由于 $\overline{D}$ 是緊致的, 我們不妨假定 $z^{(m)}$ 收斂为一点 $z^{(0)} \in \overline{D}$, 否則可选取 $\{z^{(m)}\}$ 的一收斂子串代替 $\{z^{(m)}\}$. 由連續收斂及 $f(z)$ 的連續性知,当 m 充分大时

$$|f^{(k_m)}(z^{(m)}) - f(z^{(m)})| \leqslant |f^{(k_m)}(z^{(m)}) - f(z^{(0)})| +$$
$$+ |f(z^{(m)}) - f(z^{(0)})| < \varepsilon,$$

矛盾. 故 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 $\overline{D}$ 一致收斂.

(ii) 如果 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 $\overline{D}$ 一致收斂为一連續函数 $f(z)$, 則任与 $\varepsilon>0$ 及 $\overline{D}$ 的一点 $z^{(0)}$, 必有一邻域 $S(z^{(0)}, r_\varepsilon)$ 使得

$$\sup_{a, b\in\overline{D}\cap S(z^{(0)}, r_\varepsilon)} |f(a)-f(b)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又取 k 充分大,使得

$$|f^{(k)}(z)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{3}, \text{ 对任一 } z\in\overline{D}.$$

如是可取 m 与 k 充分大,当 $a, b\in\overline{D}\cap S\left(z^{(0)}, \frac{1}{m}\right)$ 时有

$$\begin{aligned} S_{mk} &= \sup|f^{(k)}(a)-f^{(k)}(b)|\leqslant \\ &\leqslant \sup|f^{(k)}(a)-f(a)|+\sup|f(a)-f(b)|+ \\ &\quad+\sup|f(b)-f^{(k)}(b)|<\varepsilon. \end{aligned}$$

由此可見 $\sigma(z^{(0)})=0$. 根据定理 1.7.2 知, $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 $z^{(0)}$ 連續收斂. 定理証明.

一函数族 $\{f^{(\lambda)}(z)\}_{\lambda\in J}$ (J 是一可数或不可数的指标集合)在点集 A 定义. 我們称它为在 A **局部一致有界**, 如果对任一点 $a\in A$, 必有一 a 的邻域 $S(a, r)$ 及一正数 M(r, M 可以与 a 有关), 使得在 $A\cap S(a, r)$ 中

$$|f^{(\lambda)}(z)|<M, \text{ 对所有 } \lambda\in J.$$

定理 1.7.6. 如果函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在一域 D 局部一致有界, 并且对每一点 $z^{(0)}\in D$ 有 $\sigma(z^{(0)})=0$, 則必存在一子串 $\{f^{(k_m)}(z)\}$ 在 D 連續收斂.

証. 我們用所謂 Cantor 对角綫方法. 在 D 中取一可数的到处稠密的点集 $\{z^{(k)}\}$. 在下表

$$\begin{array}{l} f^{(1)}(z^{(1)}), f^{(2)}(z^{(1)}), \cdots, f^{(k)}(z^{(1)}), \cdots \\ f^{(1)}(z^{(2)}), f^{(2)}(z^{(2)}), \cdots, f^{(k)}(z^{(2)}), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(1)}(z^{(k)}), f^{(2)}(z^{(k)}), \cdots, f^{(k)}(z^{(k)}), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

中第一行的元素是有界的,可取一收斂于 $f(z^{(1)})$ 的子串

$$f^{(j_{11})}(z^{(1)}),\ f^{(j_{12})}(z^{(1)}),\ \cdots,\ f^{(j_{1k})}(z^{(1)}),\ \cdots,$$

然后在第二行的子串

$$f^{(j_{11})}(z^{(2)}),\ f^{(j_{12})}(z^{(2)}),\ \cdots,\ f^{(j_{1k})}(z^{(2)}),\ \cdots$$

中取一收斂于 $f(z^{(2)})$ 的子串

$$f^{(j_{22})}(z^{(2)}),\ f^{(j_{23})}(z^{(2)}),\ \cdots,\ f^{(j_{2k})}(z^{(2)}),\ \cdots,$$

如此継續，可得一在点集 $\{z^{(k)}\}$ 收斂的函数串

$$f^{(j_{11})}(z),\ f^{(j_{22})}(z),\ \cdots,\ f^{(j_{kk})}(z),\ \cdots.$$

$\{z^{(k)}\}$ 在 D 中稠密. 由定理 1.7.3 知，函数串 $\{f^{(j_{kk})}(z)\}$ 在 D 連續收斂. 定理証明.

§ 1.8. 多复变数函数的正规族. 在域 D 解析的函数族 $\{f^{(\lambda)}(z)\}_{\lambda\in J}$ 称为 D 的正规族，若此族的任一函数串 $\{f^{(k)}(z)\}_{k=1,2,\cdots}$ 必包含一子串 $f^{(k_1)}(z),\ f^{(k_2)}(z),\ \cdots$，此子串在 D 的每一点皆連續收斂[1].

定理 1.8.1. (超球的 Schwarz 引理). 若有在閉超球 $\bar{S}$:

$$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\leqslant r^2$$

解析的函数 $f(z)$ 适合 $f(0)=0$，則对任一 $\bar{S}$ 中的点 z，恆有

$$|f(z)|\leqslant\frac{\rho M}{r},$$

其中 M 为 $f(z)$ 在 $\bar{S}$ 的高界，$\rho=\sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2}$.

証. 作函数

$$G(z,\ t)=f(z_1t,\ \cdots,\ z_nt),\quad z\in\bar{S}.$$

此函数在 $|t|\leqslant 1$ 中是参数 t 的解析函数，并且 $G(z,0)=0$，$|G(z,\ t)|\leqslant M$. 任一点 z 适合 $\sum_{\alpha=1}^{n}|z_\alpha|^2=\rho^2$，必有一組复数 $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ 及一参数 t 适合 $\sum_{\alpha=1}^{n}|\zeta_\alpha|^2=r^2$ 及 $|t|=\frac{\rho}{r}\ (\leqslant 1)$，使得

$$z_1=\zeta_1 t,\ \cdots,\ z_n=\zeta_n t.$$

---

1) 这里正规族的定义比单复变数函数論中通常的定义稍为狹窄一些，但对本书以后的应用是足够的了.

应用单复变数函数論的 Schwarz 引理，

$$|f(z)| = |G(\zeta, t)| \leqslant M|t| = \frac{\rho M}{r}.$$

定理証明.

定理 1.8.2. 如果在域 D 解析的函数族 $\{f^{(\lambda)}(z)\}_{\lambda\in J}$ 在 D 中局部一致有界，則对此族的任一函数串 $\{f^{(k)}(z)\}_{k=1,2,\cdots}$ 及任一点 $z^{(0)}\in D$ 恆有 $\sigma(z^{(0)})=0$，因而 $\{f^{(\lambda)}(z)\}$ 是正規族.

証. 設 $z^{(0)}\in D$. 由假設知，我們有一充分小之超球 $S(z^{(0)},r)$，其閉包仍包含于 D 中者，使得所与函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 的任一函数皆适合

$$|f^{(k)}(z)-f^{(k)}(z^{(0)})|\leqslant M,\ 当\ z\in S(z^{(0)},r).$$

命 $g^{(k)}(z)=f^{(k)}(z)-f^{(k)}(z^{(0)})$. 我們取正整数 m 充分大，使 $\frac{1}{m}<r$. 应用定理 1.8.1 可知

$$|g^{(k)}(z)|\leqslant\frac{M}{mr},\ 当\ z\in\bar{S}\left(z^{(0)},\frac{1}{m}\right).$$

此乃表示

$$S_{mk}=\sup_{a,\,b\in S\left(z^{(0)},\frac{1}{m}\right)}|f^{(k)}(a)-f^{(k)}(b)|\leqslant\frac{2M}{mr},$$

因而

$$\sigma_m=\varlimsup_{k\to\infty}S_{mk}\leqslant\frac{2M}{mr},$$

由此得

$$\sigma(z^{(0)})=\lim_{m\to\infty}\sigma_m=0.$$

根据定理 1.7.6 知，存在 $\{f^{(k)}(z)\}$ 的子串在 D 連續收斂，因之 $\{f^{(\lambda)}(z)\}$ 是 D 的正規族. 定理証明.

定理 1.8.3. 若在 D 解析的函数族 $\{f^{(\lambda)}(z)\}$ 在 D 中局部一致有界，則 $\left\{\frac{\partial f^{(\lambda)}(z)}{\partial z_j}\right\}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 亦在 D 局部一致有界，因之是正規族.

証. 設 $z^{(0)}\in D$. 取閉多圓柱 $\bar{P}(z^{(0)},r)\subset D$, $r=(r_1,\cdots,r_n)$，使得有一正数 M，对所有的 λ，皆有

$$|f^{(\lambda)}(z)|\leqslant M,\quad 当\ z\in\bar{P}(z^{(0)},r).$$

应用 Cauchy 公式可知，当 $z\in P(z^{(0)}, r)$ 时

$$\frac{\partial f^{(\lambda)}(z)}{\partial z_j}=$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-z_1^{(0)}|=r_1}\cdots\int_{|\zeta_n-z_n^{(0)}|=r_n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_j-z_j)^2\cdots(\zeta_n\cdots z_n)}.$$

取一組正数 $\delta_j<r_j\,(j=1,\cdots,n)$，当 $z\in P(z^{(0)},\delta)$ 时，由上式可得出估值

$$\left|\frac{\partial f^{(\lambda)}(z)}{\partial z_j}\right|\leqslant\frac{Mr_1\cdots r_n}{(r_1-\delta_1)\cdots(r_j-\delta_j)^2\cdots(r_n-\delta_n)},$$

故 $\left\{\frac{\partial f^{(\lambda)}(z)}{\partial z_j}\right\}$ 局部一致有界．定理証明．

定理 1.8.4. 任一在 D 解析的函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 若在 D 中局部一致有界并且在 D 收斂，则必收斂于一在 D 解析的函数 $f(z)$，并且 $\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}=\lim_{k\to\infty}\frac{\partial f^{(k)}(z)}{\partial z_j}$.

証． 根据定理 1.8.2 知，当 $z\in D$ 恆有 $\sigma(z)=0$. 若命

$$f(z)=\lim_{k\to\infty}f^{(k)}(z),$$

則根据定理 1.7.4 知，$f(z)$ 在 D 連續．

若 $z^{(0)}$ 为 D 中的任一点，可命

$$\varphi^{(k)}(z_j)=\frac{f^{(k)}(z^{(0)})-f^{(k)}(z_1^{(0)},\cdots,z_{j-1}^{(0)},z_j,z_{j+1}^{(0)},\cdots,z_n^{(0)})}{z_j^{(0)}-z_j},$$

則 $\varphi^{(k)}(z_j^{(0)})=\left[\frac{\partial f^{(k)}(z)}{\partial z_j}\right]_{z=z^{(0)}}$.

由于 $\{f^{(k)}(z)\}$ 局部一致有界，我們有充分小之正数 ε，使得 $|z_j-z_j^{(0)}|\leqslant\varepsilon$ 时，

$$|f^{(k)}(z_1^{(0)},\cdots,z_{j-1}^{(0)},z_j,z_j^{(0)},\cdots,z_n^{(0)})|\leqslant M.$$

应用极大模原理，

$$|\varphi^{(k)}(z_j)|\leqslant\sup_{|\zeta_j-z_j^{(0)}|=\varepsilon}\left|\frac{f^{(k)}(z^{(0)})-f^{(k)}(z_1^{(0)},\cdots,\zeta_j,\cdots,z_n^{(0)})}{z_j^{(0)}-\zeta_j}\right|$$

$$\leqslant\frac{2M}{\varepsilon}.$$

此乃表示 $\varphi^{(k)}(z_j)$ 在 $|z_j - z_j^{(0)}| \leqslant \varepsilon$ 解析并一致有界，因之

$$\varphi(z_j) = \lim_{k\to\infty} \varphi^{(k)}(z_j) = \frac{f(z^{(0)}) - f(z_1^{(0)}, \cdots, z_j, \cdots, z_n^{(0)})}{z_j^{(0)} - z_j}$$

是在圓中連續的函数，故有

$$\varphi(z_j^{(0)}) = \lim_{z_j\to z_j^{(0)}} \frac{f(z^{(0)}) - f(z_1^{(0)}, \cdots, z_j, \cdots, z_n^{(0)})}{z_j^{(0)} - z_j} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \varphi^{(k)}(z_j^{(0)}) = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\partial f^{(k)}(z)}{\partial z_j}\right]_{z=z^{(0)}}$$

此乃表示 $f(z)$ 之偏导数存在且等于 $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\partial f^{(k)}(z)}{\partial z_j}$. 定理証明.

由此定理易知

定理 1.8.5. 若在 D 解析的函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 D 中的任一緊致子集一致收斂，則收斂于一在 D 解析的函数 $f(z)$，并且

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial f^{(k)}(z)}{\partial z_j};$$

亦卽在 D 解析的函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$，若在 D 連續收斂，則收斂为一在 D 解析的函数串，并且 $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_j} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\partial f^{(k)}(z)}{\partial z_j}$.

因为在任一緊致子集一致收斂的連續函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 必定是局部一致有界的，从定理 1.7.5 知，緊致集的一致收斂与連續收斂是等价的.

定理 1.8.6. 設在 D 解析的函数串 $\{f^{(k)}(z)\}_{k=1,2,\cdots}$ 在 D 局部一致有界. 若在 D 中有一非空开集，在其中函数串收斂，則必在整个域 D 收斂.

我們先証.

定理 1.8.7. 域 D 的正規族 $\{f^{(k)}(z)\}_{k=1,2,\cdots}$ 在 D 收斂的充要条件为：凡 $\{f^{(k)}(z)\}$ 的在 D 收斂的子串皆收斂于同一的极限函数.

証. 条件显然是必要的，現証其为充分的.

假定 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 D 中一点 $z^{(0)}$ 不收斂. 命

$$\alpha = \varlimsup_{k\to\infty} f^{(k)}(z^{(0)}), \quad \beta = \varliminf_{k\to\infty} f^{(k)}(z^{(0)}),$$

則必定 $\alpha \neq \beta$. 我們可选取两子串使得

$$\lim_{j\to\infty} f^{(p_j)}(z^{(0)}) = \alpha, \quad \lim_{j\to\infty} f^{(q_j)}(z^{(0)}) = \beta.$$

不妨假定 $\{f^{(p_j)}(z)\}$ 与 $\{f^{(q_j)}(z)\}$ 在整个域 D 收斂，否則根据正規族的定义，我們可分别选取它們的子串使之如此.

但由假設知

$$\lim_{j\to\infty} f^{(p_j)}(z) = \lim_{j\to\infty} f^{(q_j)}(z),$$

矛盾．由此得定理.

現証定理 1.8.6. 命 $\{f^{(p_j)}(z)\}$ 与 $\{f^{(q_j)}(z)\}$ 为已与函数串的任意两个在 D 收斂的子串；又命

$$f(z) = \lim_{j\to\infty} f^{(p_j)}(z), \quad g(z) = \lim_{j\to\infty} f^{(q_j)}(z).$$

由定理 1.8.4 知，$f(z)$ 与 $g(z)$ 在 D 解析，因此函数 $h(z) = f(z) - g(z)$ 亦然．但根据定理之假設，在 D 中有一非空的开集，在其中 $h(z)=0$，因此在整个域 D 中 $h(z)\equiv 0$. 由定理 1.8.7 知 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 D 收斂．这就証明了定理 1.8.6.

定理 1.8.8. 若在 D 解析的函数串 $\{f^{(k)}(z)\}$ 的每一个函数在 D 皆不取零值，并且此函数串在 D 連續收斂，則其极限函数 $f(z)$ 在 D 中或者恆等于零，或者在 D 不取零值.

証．当 $n=1$，此即单复变数正規族理論中的 Hurwitz 定理．在 n 个复变数的一般情形，此定理可利用单复变数的 Hurwitz 定理証明之如下：

如果 $f(z)$ 是常数，則定理是显然的．現設 $f(z)$ 非常数，則对任一点 $z^{(0)} \in D$，最少有一組不全为零的常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使得函数

$$\psi(t) = f(z_1^{(0)} + \alpha_1 t, \cdots, z_n^{(0)} + \alpha_n t), \quad |t| < 1$$

不恆等于零，并且所有的 $(z_1^{(0)} + \alpha_1 t, \cdots, z_n^{(0)} + \alpha_n t)$ 点（$|t| < 1$）包含在域 D 之內.

命

$$\psi^{(k)}(t) = f^{(k)}(z_1^{(0)} + \alpha_1 t, \cdots, z_n^{(0)} + \alpha_n t).$$

显然此函数串在 $|t| < 1$ 連續收斂，且在 $|t| < 1$ 不取零值．应用单复变数的 Hurwitz 定理知

$$f(z^{(0)}) = \psi(0) \neq 0.$$

定理証明.

II. 正交系与核函数

§ 2.1. 絕对值平方可积的解析函数. 命 $\mathfrak{L}^2(D)$ 表所有在一有界域 D 解析的并且其絕对值平方可积的函数 $f(z)$, 即

$$\int_D |f(z)|^2 \dot{z} < \infty,$$

其中 $\dot{z}$ 表欧氏体积元素, 即 $\dot{z} = dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \cdots dx_n dy_n$, $z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$, x_α 与 y_α 为实变数.

两函数 $f(z), g(z) \in \mathfrak{L}^2(D)$ 称为正交的, 若

$$\int_D f(z)\overline{g(z)}\dot{z} = 0.$$

函数串 $\{\varphi_k(z)\}_{k=1,2,\cdots}$ 称为 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的**正交就范函数系**, 若每一 $\varphi_k(z) \in \mathfrak{L}^2(D)$, 且

$$\int_D \varphi_k(z)\overline{\varphi_l(z)}\dot{z} = \delta_{kl},$$

其中

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{如 } k \neq l; \\ 1, & \text{如 } k = l. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

定理 2.1.1. 設 $\{\varphi_k(z)\}$ 为 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的一正交就范函数系, $f(z) \in \mathfrak{L}^2(D)$, $a_k = \int_D f(z)\overline{\varphi_k(z)}\dot{z}$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 則

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \int_D |f(z)|^2 \dot{z}.$$

(Bessel 不等式).

証. 因为

$$0 \leqslant \int_D \left| f(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(z) \right|^2 \dot{z}$$

$$= \int_D |f(z)|^2 \dot{z} - \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2,$$

故

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \leqslant \int_D |f(z)|^2 \dot{z},$$

对任一自然数N皆然．命 $N \to \infty$，即得定理．

定理 2.1.2. 若 $f(z)$ 在閉多圓柱 $\bar{P}(a,r)$:

$$|z_1 - a_1| \leqslant r_1, \cdots, |z_n - a_n| \leqslant r_n$$

解析，則

$$\int_{P(a,r)} |f(z)|^2 \dot{z} = |f(a)|^2 \int_{P(a,r)} \dot{z} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} \right|^2_{z=a} \int_{P(a,r)} |z_\alpha - a_\alpha|^2 \dot{z} +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right|^2_{z=a} \int_{P(a,r)} \times$$

$$\times |(z_\alpha - a_\alpha)(z_\beta - a_\beta)|^2 \dot{z} + \cdots.$$

証． 由 § 1.1 知，$f(z)$ 在 $\bar{P}(a, r)$ 可展为冪級数

$$f(z) = f(a) + \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_\alpha} \right)_{z=a} (z_\alpha - a_\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right)_{z=a} (z_\alpha - a_\alpha)(z_\beta - a_\beta) + \cdots,$$

并且在 $\bar{P}(a, r)$ 一致收斂．

命 $z_k - a_k = \rho_k e^{i\theta_k}$，$k_1, \cdots, k_n, m_1, \cdots, m_n$ 为非負整数，則易見

$$\int_{P(a,r)} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n} (\bar{z}_1 - \bar{a}_1)^{m_1} \cdots (\bar{z}_n - \bar{a}_n)^{m_n} \dot{z} =$$

$$= \int_0^{r_1} \cdots \int_0^{r_n} \rho_1^{k_1+m_1+1} \cdots \rho_n^{k_n+m_n+1} d\rho_1 \cdots d\rho_n \int_0^{2\pi} e^{i(k_1-m_1)\theta_1} d\theta_1 \cdots$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k_n-m_n)\theta_n} d\theta_n = 0, \text{ 如有一 } k_\alpha \neq m_\alpha.$$

把 $\int_D |f(z)|^2 \dot{z}$ 化为逐項积分，即得定理．

由此定理可得

定理 2.1.3. 如果 $f(z)\in\mathfrak{L}^2(D)$，$\bar{P}(a, r)$ 为任一閉多圓柱包含于D者，則

$$|f(a)|^2 \leqslant \frac{\int_{P(a,r)} |f(z)|^2 \dot{z}}{\pi^n r_1^2\cdots r_n^2} \leqslant \frac{\int_D |f(z)|^2 \dot{z}}{\pi^n r_1^2\cdots r_n^2}.$$

定理 2.1.4. 若 $\{\varphi_k(z)\}$ 为 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的一正交就范函数系，則

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\, \overline{\varphi_k(\zeta)}$$

是 $z\in D$，$\zeta=(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)\in D$ 的 $z_1, \cdots, z_n$ 与 $\bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_n$ 的解析函数。

証。 对任一点 $z\in D$ 作多圓柱，$P(z, r)$：

$$|\zeta_1 - z_1| < r_1, \cdots, |\zeta_n - z_n| < r_n,$$

其閉包在域D内者。由定理 2.1.3 知，

$$\sum_{k=1}^{N} |\varphi_k(z)|^2 = \int_D \left| \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(z)\, \overline{\varphi_k(\zeta)} \right|^2 \dot{\zeta}$$

$$\geqslant \pi^n r_1^2\cdots r_n^2 \left(\sum_{k=1}^{N} |\varphi_k(z)|^2 \right)^2,$$

由此知

$$\sum_{k=1}^{N} |\varphi_k(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi^n r_1^2\cdots r_n^2},\quad N=1, 2, \cdots. \tag{2.1.2}$$

此乃表示級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2$$

在D的z点收斂。

对任一閉域 $\bar{B}\subset D$，必有一正数 $R(\bar{B})$，使得对 $\bar{B}$ 的任一点 z，閉多圓柱 $|\zeta_\alpha - z_\alpha| \leqslant R(\bar{B})$ $(\alpha=1, \cdots, n)$ 包含在D中。

由(2.1.2)知，对任一点 $z\in\bar{B}$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi^n [R(\bar{B})]^{2n}}.$$

应用 Schwarz 不等式知，若 $z\in\bar{B}$，$\zeta\in\bar{B}$，則

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}\right|^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}|\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(z)|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N}|\varphi_k(\zeta)|^2\right)\leqslant\frac{1}{\pi^{2n}[R(\overline{B})]^{4n}}.$$

此乃表示函数串 $\left\{\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}\right\}_{N=1,2,\cdots}$ 在任一閉域 $\overline{B}\subset D$ 为一致有界，故必局部一致有界，并且 $\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}$ 为 $z_1,\cdots,z_n,\bar{\zeta}_1,\cdots,\bar{\zeta}_n$ 的在 $z\in D,\zeta\in D$ 中解析的函数串，在每一点皆收斂，故其极限函数 $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}$ 亦为 $z\in D,\zeta\in D$ 的 z 与 $\bar{\zeta}$ 的解析函数(定理 1.8.4). 定理証毕.

定理 2.1.5. 如果 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty$，則

(i) $g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(z)$ 在 D 的任一紧致子集一致收斂(因之在 D 解析);

(ii) $\lim\limits_{N\to\infty}\int_D\left|g(z)-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(z)\right|^2\dot{z}=0$ (因之 $g(z)\in\mathfrak{L}^2(D)$);

(iii) $a_k=\int_D g\overline{\varphi}_k\dot{z}$.

証. (i) 用上定理的証明方法可知，对任一閉域 $\overline{B}\subset D$，有

$$\left|\sum_{k=N}^{\infty}a_k\varphi_k(z)\right|^2\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|^2\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(z)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi^n[R(\overline{B})]^{2n}}\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|^2.$$

由此可見，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(z)$ 在 $\overline{B}$ 一致收斂，故 $g(z)$ 在 D 解析(定理

1.8.5).

(ii) 根据 (i), $g(z)$ 在D中任一紧致集一致收斂,任取一閉域 $\bar{B}\subset D$,则有

$$\int_{\bar{B}}\left|g(z)-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(z)\right|^2\dot{z}=\int_{\bar{B}}\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{k=N+1}^{N+m}a_k\varphi_k(z)\right|^2\dot{z}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_{\bar{B}}\left|\sum_{k=N+1}^{N+m}a_k\varphi_k(z)\right|^2\dot{z}\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|^2.$$

此乃表示任与 $\varepsilon>0$, 可取N充分大,使得

$$\int_{\bar{B}}\left|g(z)-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(z)\right|^2\dot{z}<\varepsilon.$$

上式对任一包含于D的閉域 $\bar{B}$ 皆成立,故有

$$\int_{D}\left|g(z)-\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k(z)\right|^2\dot{z}\leqslant\varepsilon.$$

(iii) 由于对任一 a_k 可取N适当大使得

$$\left|\int_D g\overline{\varphi}_k\dot{z}-a_k\right|=\left|\int_D g\overline{\varphi}_k\dot{z}-\int_D\left(\sum_{l=1}^{N}a_l\varphi_l\right)\overline{\varphi}_k\dot{z}\right|=$$

$$=\left|\int_D\left(g-\sum_{l=1}^{N}a_l\varphi_l\right)\overline{\varphi}_k\dot{z}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_D\left|g(z)-\sum_{l=1}^{N}a_l\varphi_l(z)\right|^2\dot{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_D|\varphi_k(z)|^2\dot{z}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

根据定理之第(ii)部分知,上式可以任意小,因之

$$a_k=\int_D g\overline{\varphi}_k\dot{z}.$$

定理証明.

$\mathfrak{L}^2(D)$ 的一正交就范函数系 $\{\varphi_k(z)\}$ 称为**完备的**, 如对任一函数 $f(z)\in\mathfrak{L}^2(D)$, 下面条件之一成立:

(c_1) 有表示式

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(z),$$

其中 $a_k = \int_D f(z)\overline{\varphi_k(z)}\dot{z}$；

(c_2) 若 $\int_D f\overline{\varphi}_k\dot{z} = 0$，$k = 1, 2, \cdots$，则必須 $f \equiv 0$；

(c_3) 若命 $a_k = \int_D f\overline{\varphi}_k\dot{z}$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \int_D |f|^2\dot{z}.$$

我們要証明这三个条件是等价的.

由定理 2.1.5 (ii) 知，完备性条件 (c_1)包含 (c_3). (c_3) 显然包含(c_2)，最后只需証(c_2)包含(c_1).

設任一 $f\epsilon\mathfrak{L}^2(D)$，$\{\varphi_k\}$ 为 (c_2) 定义下的完备正交就范函数系. 命

$$a_\nu = \int_D f\overline{\varphi}_k\dot{z} \quad 及 \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(z),$$

根据定理 2.1.1 及 2.1.5 (i) 知，$g(z)$ 在D解析；由定理 2.1.5 (iii) 知，必須

$$a_k = \int_D g\overline{\varphi}_k\dot{z}.$$

由此知

$$\int_D (f - g)\overline{\varphi}_k\dot{z} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

而由(c_2)知

$$f \equiv g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(z),$$

故条件(c_1)，(c_2)，(c_3)是等价的.

§ 2.2. $\mathfrak{L}^2(D)$ 的完备正交就范函数系的存在.

定理 2.2.1. 若D是 C^n 的一有界域，则存在一 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的完备正交就范函数系.

証. 不妨假設D包含原点. 为簡便起見，命

$$\partial_1^{p_1}\partial_2^{p_2}\cdots\partial_n^{p_n} = \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial z_1^{p_1}\cdots\partial z_n^{p_n}} \tag{2.2.1}$$

及

$$\partial_1^{p_1}\partial_2^{p_2}\cdots\partial_n^{p_n}f^0=\left(\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}f(z)}{\partial z_1^{p_1}\cdots\partial z_n^{p_n}}\right)_{z=0};$$

$$\partial_k^0 f^0=f(0). \tag{2.2.2}$$

把指标組 $(p_1, \cdots, p_n)$ 排一次序如下：如果 $m_1+m_2+\cdots+ +m_n<p_1+p_2+\cdots+p_n$，則命 $(m_1, \cdots, m_n)$ 在 $(p_1, \cdots, p_n)$ 之前；如果 $m_1+\cdots+m_n=p_1+\cdots+p_n$，$m_n=p_n\cdots$，$m_{k+1}=p_{k+1}(k\geqslant 1)$ 而 $m_k<p_k$，則命 $(m_1, \cdots, m_n)$ 在 $(p_1, \cdots, p_n)$ 之前。此外我們以符号 $(m_1, \cdots, m_n)\subset(p_1, \cdots, p_n)$ 表指标組 $(m_1, \cdots, m_n)$ 在 $(p_1, \cdots, p_n)$ 之前；$(m_1, \cdots, m_n)\subseteq(p_1, \cdots, p_n)$ 表指标組 $(m_1, \cdots, m_n)$ 在 $(p_1, \cdots, p_n)$ 之前或者两者相等。

(i) 以 $E^{p_1,\cdots,p_n}$ 表 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的子集，任一 $f(z)\in E^{p_1,\cdots,p_n}$ 适合下面的条件：

$$\partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}f^0=0, \text{ 若 } (m_1, \cdots, m_n)\subset(p_1, \cdots, p_n),$$

$$\partial_1^{p_1}\cdots\partial_n^{p_n}f^0=1. \tag{2.2.3}$$

显然 $\dfrac{z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n}}{p_1!\cdots p_n!}\in E^{p_1,\cdots,p_n}$，故 $E^{p_1,\cdots,p_n}$ 是非空的集合。

現在我們找一极小函数 $h(z)\in E^{p_1,\cdots,p_n}$ 使 $\int_D|h(z)|^2\dot{z}$ 为最小者。此值命之为 A，即

$$A=\inf_{f\in E^{p_1,\cdots,p_n}}\int_D|f(z)|^2\dot{z}.$$

取一函数串 $h_l(z)\in E^{p_1,\cdots,p_n}$ $(l=1, 2, \cdots)$，使得

$$\lim_{l\to\infty}\int_D|h_l(z)|^2\dot{z}=A.$$

由定理 2.1.3 知，对任一閉域 $\overline{B}\subset D$，任意 $z\in\overline{B}$，

$$|h_l(z)|^2\leqslant\frac{\int_D|h_l(z)|^2\dot{z}}{\pi^n[R(\overline{B})]^{2n}}.$$

而后者趋于 $\dfrac{A}{\pi^n[R(\overline{B})]^{2n}}$，当 $l\to\infty$。故函数串 $\{h_l(z)\}$ 在 $\overline{B}$ 一致有界，因而成一正規族(定理 1.8.2)，我們可以在其中取一子串 $h_{l_j}(z)$，

使之在D收敛为一解析函数$h(z)$，显然$h(z)\in E^{p_1,\cdots,p_n}$，因为每一$h_{l_j}(z)\in E^{p_1,\cdots,p_n}$（定理 1.8.4）。故对任一闭域$\bar{B}$包含于$D$者有

$$\int_B |h(z)|^2\dot{z} = \lim_{j\to\infty}\int_B |h_{l_j}(z)|^2\dot{z} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{j\to\infty}\int_D |h_{l_j}(z)|^2\dot{z} = A.$$

由于$\bar{B}$可以是任意的，故有

$$\int_D |h(z)|^2\dot{z} \leqslant A;$$

另一方面，

$$\int_D |h(z)|^2\dot{z} \geqslant A,$$

故$\int_D |h(z)|^2\dot{z} = A$，而$h(z)$为$E^{p_1,\cdots,p_n}$的极小函数。

(ii) 任一函数$g(z)\in\mathfrak{L}^2(D)$并适合$\partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}g^0=0$，当$(m_1,\cdots,m_n)\subseteq(p_1,\cdots,p_n)$时，则

$$\int_D h(z)\overline{g(z)}\dot{z} = 0. \tag{2.2.4}$$

因为对任一常数c，$h(z)+cg(z)\in E^{p_1,\cdots,p_n}$；特别取

$$c = -\frac{\int_D h\bar{g}\dot{z}}{\int_D |g|^2\dot{z}},$$

则

$$\int_D |h+cg|^2\dot{z} = \int_D |h|^2\dot{z} + \bar{c}\int_D h\bar{g}\dot{z} +$$

$$+ c\int_D \bar{h}g\dot{z} + |c|^2\int_D |g|^2\dot{z} =$$

$$= A - \frac{\left|\int_D h\bar{g}\dot{z}\right|^2}{\int_D |g|^2\dot{z}} \leqslant A.$$

这是不可能的，除非

$$\int_D h\bar{g}\dot{z} = 0,$$

(iii) 极小函数是唯一的，若 $E^{p_1,\cdots,p_n}$ 有另一极小函数 $h_1(z)$，則 $g(z)=h(z)-h_1(z)$ 适合(ii)的条件，因而

$$\int_D h(\bar{h}-\bar{h}_1)\dot{z}=\int_D h_1(\bar{h}-\bar{h}_1)\dot{z}=0,$$

即

$$\int_D |h-h_1|^2\dot{z}=0.$$

故 $h\equiv h_1$.

(iv) 現在为清楚起見，以 $h_{p_1\cdots p_n}(z)$ 表 $E^{p_1,\cdots,p_n}$ 的极小函数 $(p_1,\cdots,p_n=0,1,2,\cdots)$. 由(ii)知$\{h_{p_1\cdots p_n}\}$成一正交系，即

$$\int_D h_{p_1\cdots p_n}(z)\overline{h_{q_1\cdots q_n}(z)}\dot{z}=0,\ 如有一\ p_k\neq q_k.$$

若命

$$\varphi_{p_1\cdots p_n}(z)=\frac{h_{p_1\cdots p_n}(z)}{\left(\int_D |h_{p_1\cdots p_n}(z)|^2\dot{z}\right)^{1/2}},$$

則 $\{\varphi_{p_1\cdots p_n}(z)\}$ 成一 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的正交就范函数系. 現在証明此系是完备的.

設 $f(z)$ 为任一 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的函数. 作函数

$$f_{p_1\cdots p_n}(z)=\sum_{(m_1,\cdots,m_n)\subseteq(p_1,\cdots,p_n)} a_{m_1\cdots m_n}\varphi_{m_1\cdots m_n}(z),$$

其中 $a_{m_1\cdots m_n}$ 的选择使得 $f_{p_1\cdots p_n}(z)$ 适合下面条件:

$$\partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}f^0_{p_1\cdots p_n}=\partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}f^0,$$

当
$$(m_1,\cdots,m_n)\subseteq(p_1,\cdots,p_n). \tag{2.2.5}$$

这是可能的，因为由(2.2.5)所得的方程組中，$a_{m_1\cdots m_n}$ 之系数所成的函数行列式不为零.

由(ii)知

$$\int_D (f_{p_1\cdots p_n}-f)\overline{\varphi}_{m_1\cdots m_n}\dot{z}=0,$$

当
$$(m_1,\cdots,m_n)\subseteq(p_1,\cdots,p_n),$$

此即

$$\int_D \left(\sum a_{q_1\cdots q_n}\varphi_{q_1\cdots q_n}-f\right)\overline{\varphi}_{m_1\cdots m_n}\dot{z}=$$

$$= a_{m_1\cdots m_n} - \int_D f\overline{\varphi}_{m_1\cdots m_n}\dot{z} = 0,$$

或

$$a_{m_1\cdots m_n} = \int_D f\overline{\varphi}_{m_1\cdots m_n}\dot{z}. \tag{2.2.6}$$

若命

$$q(z) = \sum_{p_1,\cdots,p_n=0}^{\infty} a_{p_1\cdots p_n}\ \varphi_{p_1\cdots p_n}(z),$$

則由定理 2.1.1 知

$$\sum_{p_1,\cdots,p_n=0}^{\infty} |a_{p_1,\cdots,p_n}|^2 \leqslant \int_D |f|^2\dot{z}.$$

由定理 2.2.5 知, $q(z)$ 在 D 为解析并且

$$q(z) = \lim_{\substack{p_1\to\infty\\ \cdots\\ p_n\to\infty}} f_{p_1\cdots p_n}(z).$$

根据条件(2.2.5)知, 当 $(m_1, \cdots, m_n)\subseteq(p_1, \cdots, p_n)$ 时,

$$\partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}q^0 = \partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}f^0_{p_1\cdots p_n} = \partial_1^{m_1}\cdots\partial_n^{m_n}f^0,$$

此即

$$\left(\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}q(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right)_{z=0},$$

$$m_1, \cdots, m_n = 0, 1, \cdots.$$

此乃表示必須

$$f(z) \equiv q(z) = \sum_{p_1,\cdots,p_n=0}^{\infty} a_{p_1\cdots p_n}\ \varphi_{p_1\cdots p_n}(z),$$

其中根据(2.2.6)

$$a_{p_1\cdots p_n} = \int_D f\overline{\varphi}_{p_1\cdots p_n}\dot{z}.$$

因之 $\{\varphi_{p_1\cdots p_n}(z)\}$ 是 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的完备正交就范函数系, 定理得証.

在上定理的証明之始, 我們曾把指标組排列成一个次序. 我們可以按此次序以一个指标表此完备正交就范系, 即

$$\{\varphi_k(z)\}_{k=1,2,\cdots}.$$

值得注意者, 上面定理之証明包含了: 可在原点附近选取一完

备正交就范系，使得在原点附近的展式为

$$\varphi_0(z)=a_0^{(0)}+a_1^{(0)}z_1+\cdots+a_n^{(0)}z_n+a_{11}^{(0)}z_1^2+a_{12}^{(0)}z_1z_2+\cdots, a_0^{(0)}\neq 0;$$

$$\varphi_1(z)= \quad a_1^{(1)}z_1+\cdots+a_n^{(1)}z_n+a_{11}^{(1)}z_1^2+a_{12}^{(1)}z_1z_2+\cdots, a_1^{(1)}\neq 0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(z)= \quad a_n^{(n)}z_n+a_{11}^{(n)}z_1^2+a_{12}^{(n)}z_1z_2+\cdots, a_n^{(n)}\neq 0;$$

$$\varphi_{n+1}(z)= \quad a_{11}^{(n+1)}z_1^2+a_{12}^{(n+1)}z_1z_2+\cdots, a_{11}^{(n+1)}\neq 0;$$

$$\varphi_{n+2}(z)= \quad a_{12}^{(n+2)}z_1z_2+\cdots, a_{12}^{(n+2)}\neq 0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

又若在 $\mathfrak{L}^2(D)$ 中定义内积为 $(f, g)=\int_D f\bar{g}\dot{z}$，范数为 $\|f\|=\left\{\int_D |f|^2\dot{z}\right\}^{\frac{1}{2}}$，則成一 Hilbert 空間．定理 2.1.5 (ii)与定理 2.2.1 分别証明它是完备的与分离的．

現在还沒有解决的問題是：在什么条件下一复解析流形[1]上也存在完备正交系？

§ 2.3. 核函数. 設 $\{\varphi_k(z)\}$ 为有界域 D 的 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的一完备正交系(以后簡称域 D 的完备系)．命

$$K(z, \bar{\zeta})=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)},\quad z\in D,\quad \zeta\in D$$

这称为域 D 的核函数．由定理 2.1.4 知，这是 z 与 $\bar{\zeta}$ 的解析函数．核函数有下列的性质：

定理 2.3.1. 如果 $t=(t_1, \cdots, t_n)\in D$，則 $K(t, \bar{t})>0$.

此即謂 $\{\varphi_k(t)\}$ 在 D 内沒有公共零点，这是显然的，因为任一 $f(z)\in\mathfrak{L}^2(D)$ 能展为 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(z)$．如果 $\varphi_k(z)$ $(k=0,1,\cdots)$以 t 点为公共零点，则必$f(t)=0$．这是不可能的，因为$f(t)+c$ 仍然属于 $\mathfrak{L}^2(D)$，其中 c 为任意常数．

定理 2.3.2. 若 $f(z)\in\mathfrak{L}^2(D)$，則对任一点 $t=(t_1,\cdots, t_n)\in D$，

$$f(t)=\int_D f(z)K(t, \bar{z})\dot{z}. \tag{2.3.1}$$

及

---

1) 关于复解析流形的定义，可参閱陈省身[1]．

$$\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(t)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}} = \int_D f(z) \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} K(t, \bar{z})}{\partial t_1^{m_1}\cdots\partial t_n^{m_n}} \dot{z}. \qquad (2.3.2)$$

証. 把 $f(z)$ 展为

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(z), \qquad a_k = \int_D f \overline{\varphi}_k \dot{z}.$$

我們有

$$\lim_{N\to\infty} \left| \int_D f(z) K(t, \bar{z}) \dot{z} - \sum_{k=0}^{N} a_k \varphi_k(t) \right| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left| \int_D f(z) \left[K(t, \bar{z}) - \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(t) \overline{\varphi_k(z)} \right] \dot{z} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \left(\int_D \left| K(t, \bar{z}) - \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(t) \overline{\varphi_k(z)} \right|^2 \dot{z} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int_D |f(z)|^2 \dot{z} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

上面末式之第一个因子据定理 2.1.5 是趋于零的，由此知(2.3.1)成立，同法可証(2.3.2)。

定理 2.3.3. 設 t 为 D 中一定点，$\dfrac{K(z, \bar{t})}{K(t, \bar{t})}$ 为 $\mathfrak{L}^2(D)$ 中适合条件

$$f(t) = 1, \quad t \in D$$

的函数类中的极小函数。

証. 如果 $f(t) = 1$，則由定理 2.3.2 知

$$1 = |f(t)|^2 = \left| \int_D f(z) K(t, \bar{z}) \dot{z} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_D |f(z)|^2 \dot{z} \int_D |K(t, \bar{z})|^2 \dot{z} = K(t, \bar{t}) \int_D |f(z)|^2 \dot{z},$$

此乃表示

$$\int_D |f(z)|^2 \dot{z} \geqslant \frac{1}{K(t, \bar{t})}.$$

但是

$$\int_D \left| \frac{K(z, \bar{t})}{K(t, \bar{t})} \right|^2 \dot{z} = \frac{1}{K(t, \bar{t})},$$

故 $\dfrac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})}$ 是适合所設条件的极小函数。

定理 2.3.4. 当 $z=\zeta$ 时，域 D 的核函数能定义为

$$K(z,\bar{z})=\sup_{h\in H}|h(z)|^2,\quad z\in D,$$

其中 H 代表一函数类，它的任一函数 $h(z)$ 在 D 解析并适合

$$\int_D|h(z)|^2\dot{z}\leqslant 1.$$

証. 命

$$\varphi(\zeta)=\frac{K(\zeta,\bar{z})}{\sqrt{K(z,\bar{z})}},$$

显見 $\varphi(\zeta)\in H$，故

$$K(z,\bar{z})=|\varphi(z)|^2\leqslant\sup_{h\in H}|h(z)|^2.$$

如果 $h(z)\in H$，則由定理 2.3.3 知

$$|h(z)|^2\leqslant\frac{|h(z)|^2}{\int_D|h(\zeta)|^2\dot{\zeta}}=\frac{1}{\int_D\left|\dfrac{h(\zeta)}{h(z)}\right|^2\dot{\zeta}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\int_D\left|\dfrac{K(\zeta,\bar{z})}{K(z,\bar{z})}\right|^2\dot{\zeta}}=K(z,\bar{z}).$$

此乃表示

$$K(z,\bar{z})\geqslant\sup_{h\in H}|h(z)|^2,$$

故 $K(z,\bar{z})=\sup_{h\in H}|h(z)|^2$.

由此定理知，$K(z,\bar{z})$ 与域 D 的完备系之选择无关，再由定理 2.3.3 及定理 2.2.1 的証明(iii)中极小函数的唯一性知 $K(z,\bar{\zeta})$ 亦与完备系之选择无关。

又由此定理知

定理 2.3.5. 設两有界域 D_1 与 D_2 适合 $D_1\subset D_2$，其核函数分别为 $K_{D_1}(z,\bar{z})$ 与 $K_{D_2}(z,\bar{z})$，則

$$K_{D_1}(z,\bar{z})\geqslant K_{D_2}(z,\bar{z}),\quad z\in D_1.$$

定理 2.3.6. 設 D_1 与 D_2 分别是空間 C^n 与 C^m 的有界域，D

为其拓扑积 $D_1 \times D_2$，则域D的核函数等于域D_1与域D_2的两核函数的乘积.

証. 設D_1在$z_1, \cdots, z_n$空間，D_2在$z_{n+1}, \cdots, z_{n+m}$空間，$z=(z_1, \cdots, z_{n+m})$. 我們首先証明:

(i) 若$f(z) \in \mathfrak{L}^2(D)$，則对固定的

$$(z_1, \cdots, z_n) \in D_1, f(z) \in \mathfrak{L}^2(D_2).$$

实际上,可取閉多圓柱 $\bar{P}((z_1, \cdots, z_n), r) \subset D_1$. 对任一点$(\xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+m}) \in D_2$，根据定理 2.1.3 有

$$|f(z_1, \cdots, z_n, \xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+m})|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^n r_1^2 \cdots r_n^2} \int_{P((z_1, \cdots, z_n), r)} |f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n, \xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+m})|^2 \dot{\zeta}.$$

命$\bar{B}_2$是包含于D_2的任一閉域,則

$$\int_{\bar{B}_2} |f(z_1, \cdots, z_n, \xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+m}|^2 \dot{\xi} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^n r_1^2 \cdots r_n^2} \int_{D_1 \times D_2} |f(\zeta, \xi)|^2 \dot{\zeta} \dot{\xi}.$$

由于$\bar{B}_2$可以是D_2中任一閉域,这証明了$f(z_1, \cdots, z_n, \xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+m})$对变数$\xi$属于$\mathfrak{L}^2(D_2)$.

(ii) 命域D, D_1, D_2的核函数分别为

$$K(z_1, \cdots, z_{n+m}, \bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_{n+m}),$$
$$K_1(z_1, \cdots, z_n, \bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_n),$$
$$K_2(z_{n+1}, \cdots, z_{n+m}, \bar{\zeta}_{n+1}, \cdots, \bar{\zeta}_{n+m}).$$

根据定理 2.3.2 知,当$(t_1, \cdots, t_{n+m}), (\zeta_1, \cdots, \zeta_{n+m}) \in D$,

$$K_1(t_1, \cdots, t_n, \bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_n) K_2(t_{n+1}, \cdots, t_{n+m}, \bar{\zeta}_{n+1}, \cdots, \bar{\zeta}_{n+m}) =$$

$$= \int_D K_1(z_1, \cdots, z_n, \bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_n) K_2(z_{n+1}, \cdots,$$
$$z_{n+m}, \bar{\zeta}_{n+1}, \cdots, \bar{\zeta}_{n+m}) K(t, \bar{z}) \dot{z} =$$

$$= \int_{D_1} K_1(z_1, \cdots, z_n, \bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_n) \prod_{\alpha=1}^{n} dx_\alpha dy_\alpha \int_{D_2} K(t, \bar{z}) \times$$

$$\times K_2(z_{n+1}, \cdots, z_{n+m}, \bar{\zeta}_{n+1}, \cdots, \bar{\zeta}_{n+m}) \prod_{\alpha=n+1}^{n+m} dx_\alpha dy_\alpha =$$

$$= K(t_1, \cdots, t_{n+m}, \bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_{n+m}).$$

定理証明.

定理 2.3.7. 若有一解析变换 T:

$$w_1 = \varphi_1(z), \cdots, w_n = \varphi_n(z)$$

把有界域 D 一一映为有界域 D_1, 則域 D 的核函数 $K(z, \bar{\zeta})$ 与域 D_1 的核函数 $K_1(w, \bar{\xi})$ 的关系为

$$K(z, \bar{\zeta}) = K_1(w, \bar{\xi}) \det \frac{\partial(w_1, \cdots, w_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)} \overline{\frac{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_n)}{\partial(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}},$$

其中 $\xi_\alpha = \varphi_\alpha(\zeta)$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$.

証. 由定理 1.6.6 知, 变换 T 之函数行列式不为零. 由定理 1.3.1 知

$$\dot{z} = \left| \det \frac{\partial(z_1, \cdots, z_n)}{\partial(w_1, \cdots, w_n)} \right|^2 \dot{w}. \tag{2.3.3}$$

此乃表示如果 $f(z) \in \mathfrak{L}^2(D)$, 則 $f(z(w)) \det \dfrac{\partial(z_1, \cdots, z_n)}{\partial(w_1, \cdots, w_n)}$ 属于 $\mathfrak{L}^2(D_1)$. 如果 $\{\varphi_k(z)\}$ 是 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的一正交就范函数系, 則

$$\left\{ \varphi_k(z(w)) \det \frac{\partial(z_1, \cdots, z_n)}{\partial(w_1, \cdots, w_n)} \right\}$$

是 $\mathfrak{L}^2(D_1)$ 的一正交就范函数系. 此外, 若 $\{\varphi_k(z)\}$ 对 $\mathfrak{L}^2(D)$ 是完备的, 則

$$\left\{ \varphi_k(z(w)) \det \frac{\partial(z_1, \cdots, z_n)}{\partial(w_1, \cdots, w_n)} \right\}$$

对 $\mathfrak{L}^2(D_1)$ 亦然. 实际上, 只要証明: 若任一 $f(w) \in \mathfrak{L}^2(D_1)$ 且适合

$$\int_{D_1} f(w) \overline{\varphi_k(z(w)) \frac{\partial(z_1, \cdots, z_n)}{\partial(w_1, \cdots, w_n)}} \dot{w} = 0, \tag{2.3.4}$$

$k = 0, 1, \cdots$, 則 $f(w) \equiv 0$.

由(2.3.3)知, (2.3.4)即

$$\int_D \left[f(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z)) \frac{\partial(w_1, \cdots, w_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)} \right] \overline{\varphi_k(z)} \dot{z} = 0$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots; \ f(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z)) \frac{\partial(w_1, \cdots, w_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}$$

属于 $\mathfrak{L}^2(D)$，而 $\{\varphi_k(z)\}$ 是完备的. 因此

$$f(\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z))\frac{\partial(w_1, \cdots, w_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)} \equiv 0.$$

但 $\dfrac{\partial(w_1, \cdots, w_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)} \neq 0$，故 $f(w) \equiv 0$.

由此知 D_1 的核函数为

$$K_1(w, \bar{\xi}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z(w))\ \overline{\varphi_k(\zeta(\xi))}\ \frac{\partial(z_1, \cdots, z_n)}{\partial(w_1, \cdots, w_n)}\ \overline{\frac{\partial(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_n)}} =$$

$$= K(z, \bar{\zeta})\ \frac{\partial(z_1, \cdots, z_n)}{\partial(w_1, \cdots, w_n)}\ \overline{\frac{\partial(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_n)}}.$$

定理得証.

例. (i) 多圆柱

$$|z_1| < r_1,\ |z_2| < r_2, \cdots, |z_n| < r_n$$

的完备系为

$$\left\{\frac{\sqrt{(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_n+1)}}{\pi^{\frac{n}{2}} r_1^{m_1+1}\cdots r_n^{m_n+1}}\ z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}\right\}_{m_1,\cdots,m_n=0,1,2,\cdots,} \tag{2.3.5}$$

而核函数为

$$K(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\pi^n r_1^2\cdots r_n^2\left(1-\dfrac{z_1\bar{\zeta}_1}{r_1^2}\right)^2\left(1-\dfrac{z_2\bar{\zeta}_2}{r_2^2}\right)^2\cdots\left(1-\dfrac{z_n\bar{\zeta}_n}{r_n^2}\right)^2}. \tag{2.3.6}$$

(ii) 超球

$$|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < r^2$$

的完备系为

$$\left\{\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} r^{n+m_1+\cdots+m_n}}\sqrt{\frac{(n+m_1+\cdots+m_n)!}{m_1!\cdots m_n!}}\ z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}\right\}_{m_1,\cdots,m_n=0,1,2,\cdots,} \tag{2.3.7}$$

而核函数为

$$K(z, \bar{\zeta}) = \frac{n!}{\pi^n r^{2n}\left(1-\dfrac{z_1\bar{\zeta}_1+\cdots+z_n\bar{\zeta}_n}{r^2}\right)^{n+1}}. \tag{2.3.8}$$

讀者試自証之.

§ 2.4. 极小問題. 設D是一有界域，$\{\varphi_k(z)\}$ 是 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的一完备正交就范系. 設 $f(z)\in\mathfrak{L}^2(D)$，則能展为

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(z), \tag{2.4.1}$$

其中

$$a_k=\int_D f(z)\overline{\varphi_k(z)}\dot{z}. \tag{2.4.2}$$

我們要找一 $f(z)$，使得 a_k 适合条件

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k a_{\nu k}=b_\nu,\quad (\nu=1,\cdots,N) \tag{2.4.3}$$

其中 $\{a_{\nu k}\}_{\nu=1,\cdots,N}$ 是N組已与的复数，适合 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_{\nu k}|^2<\infty(\nu=1,\cdots,N)$且下面的 $N\times N$ 方陣为非异：

$$A=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{1k}\bar{a}_{1k}\cdots\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{1k}\bar{a}_{Nk}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{Nk}\bar{a}_{1k}\cdots\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{Nk}\bar{a}_{Nk}\end{pmatrix}; \tag{2.4.4}$$

而 $b_1,\cdots,b_N$ 为任意已与的复数. 此外，$\int_D|f|^2\dot{z}$ 之值为极小.

由于 $\{\varphi_k(z)\}$ 是完备的，故

$$\int_D|f(z)|^2\dot{z}=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2.$$

应用 Lagrange 待定因子法，我們在公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\bar{a}_k-\sum_{\nu=1}^{N}\left[\lambda_\nu\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k a_{\nu k}-b_\nu\right)+\bar{\lambda}_\nu\left(\sum_{k=0}^{\infty}\bar{a}_k\bar{a}_{\nu k}-\bar{b}_\nu\right)\right]$$

中对 $\bar{a}_k$ 微分，再命上式为零得

$$a_k=\sum_{\nu=0}^{N}\bar{\lambda}_\nu\bar{a}_{\nu k}. \tag{2.4.5}$$

以之代入(2.4.3)得

$$\sum_{\nu=1}^{N} \bar{\lambda}_\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_{\mu k}\bar{a}_{\nu k} = b_\mu, \quad \mu = 1, \cdots, N. \tag{2.4.6}$$

命(2.4.4)的方陣之元素为 $\alpha_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\mu k}\bar{a}_{\nu k}$, $\mu, \nu = 1, \cdots, N$; 又命

$$A_\nu = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\cdots\alpha_{1(\nu-1)}\alpha_{1(\nu+1)}\cdots\alpha_{1N} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{N1}\cdots\alpha_{N(\nu-1)}\alpha_{N(\nu+1)}\cdots\alpha_{NN} \end{pmatrix} \tag{2.4.7}$$

及

$$b = (b_1, \cdots, b_N). \tag{2.4.8}$$

我們通常以 B' 表矩陣 B 之置換，則(2.4.6)有解

$$\bar{\lambda}_\nu = (-1)^{\nu-1}\frac{\det(b', A_\nu)}{\det A}, \quad \nu = 1, \cdots, N, \tag{2.4.9}$$

此处 $\det A$ 表方陣 A 的行列式. 以上式代入(2.4.5)得

$$a_k = \sum_{\nu=1}^{N} (-1)^{\nu-1}\frac{\det(b', A_\nu)}{\det A}\bar{a}_{\nu k}. \tag{2.4.10}$$

因之所求之极小函数为

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(z) = \sum_{\nu=1}^{N} (-1)^{\nu-1}\frac{\det(b', A_\nu)}{\det A}\sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_{\nu k}\varphi_k(z).$$

若命

$$\varphi(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}\varphi_k(z), \cdots, \sum_{k=0}^{\infty} a_{Nk}\varphi_k(z)\right), \tag{2.4.11}$$

則

$$f(z) = -\det\begin{pmatrix} 0 & \varphi(z) \\ b' & A \end{pmatrix}\Big/\det A. \tag{2.4.12}$$

而极小値根据(2.4.5)及(2.4.9)可得

$$\int_D |f|^2\dot{z} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu a_{\nu k} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k a_{\nu k} = \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu b_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} (-1)^{\nu-1} \frac{\det(\bar{b}', \bar{A}_\nu)}{\det A} b_\nu.$$

故有(注意 $\bar{A}' = A$)

$$\int_D |f(z)|^2 \dot{z} = - \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & \bar{b} \\ b' & A \end{pmatrix}}{\det A}. \tag{2.4.13}$$

定理 2.4.1. 有唯一的 $\mathfrak{L}^2(D)$的极小函数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(z)$ 适合条件(2.4.3)与(2.4.4)，且此函数能以(2.4.12)表之，而其极小值为(2.4.13).

現在只要証明解(2.4.12)是唯一的. 若另有一解

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(z),$$

則 c_k 适合

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_{\nu k} = b_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, N.$$

由此及(2.4.5)知

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\bar{c}_k - \bar{a}_k) = \sum_{\nu=0}^{N} \bar{\lambda}_\nu \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{c}_k - \bar{a}_k) \bar{a}_{\nu k} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \bar{\lambda}_\nu (\bar{b}_\nu - \bar{b}_\nu) = 0,$$

故若有一 $a_k \neq c_k$，則

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} [|a_k - c_k|^2 + 2R_e\{a_k(\bar{c}_k - \bar{a}_k)\}] >$$

$$> \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2.$$

这是不可能的，因此所有的 $a_k = c_k$ $(k = 0, 1, \cdots)$.

現举一例. 設 t 为域 D 的一固定点，$u_1, \cdots, u_n$ 为一組不全为零的复数. 求作一 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的极小函数 $f(z)$，在 t 点适合

$$f(t)=0,\quad \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f(t)}{\partial t_\alpha}u_\alpha=1. \tag{2.4.14}$$

如果 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(z)$，此条件即

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(t)=0,\ \sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k(t)}{\partial t_\alpha}u_\alpha=1, \tag{2.4.15}$$

若我們选取坐标使 $t=0$ 及 $\{\varphi_k\}$ 为 § 2.2 之末所写的形式，則不难証明相应于(2.4.4)的方陣 A 是非异的.

于是根据定理 2.4.1，經計算可知，极小函数为

$$f(z)=\frac{K(z,\bar{t})\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial\bar{t}_k}\bar{u}_k-K(t,\bar{t})\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial K(z,\bar{t})}{\partial\bar{t}_k}\bar{u}_k}{[K(t,\bar{t})]^2\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha\partial\bar{t}_\beta}u_\alpha\bar{u}_\beta\right\}}, \tag{2.4.16}$$

而极小値为

$$\int_D|f(z)|^2\dot{z}=\frac{1}{K(t,\bar{t})\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha\partial\bar{t}_\beta}u_\alpha\bar{u}_\beta\right\}}, \tag{2.4.17}$$

其中 $K(z,\bar{t})$ 为域 D 的核函数.

現設 $D\subset D_1$，D_1 是有界域，則凡 $\mathfrak{L}^2(D_1)$ 的函数必属于 $\mathfrak{L}^2(D)$. 故有

定理 2.4.2. 若 $D\subset D_1$，而 λ_D 是 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的适合条件(2.2.3)的极小函数之极小値，而 λ_{D_1} 是 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的适合同一条件的极小函数之极小値，則恆有 $\lambda_D\leqslant\lambda_{D_1}$.

§ 2.5. Bergmann 度量. 設 D 为有界域，$K(z,\bar{t})$ 为其核函数. 我們命

$$T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z})=\frac{\partial^2\log K(z,\bar{z})}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta},\ \alpha,\beta=1,\cdots,n \tag{2.5.1}$$

及

$$T(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}T_{1\bar{1}}(z,\bar{z})\cdots T_{1\bar{n}}(z,\bar{z})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ T_{n\bar{1}}(z,\bar{z})\cdots T_{n\bar{n}}(z,\bar{z})\end{pmatrix}, \tag{2.5.2}$$

这显然是一 Hermitian 方陣,即有 $\bar{T}' = T$.

我們称方陣 T 为域 D 的度量方陣,而称二次微分式

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} T_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \overline{dz_\beta} = dz T \overline{dz}' \qquad (2.5.3)$$

为 Bergmann 度量,其中 $dz = (dz_1, \cdots, dz_n)$表一 n 維向量.

定理 2.5.1. 一有界域 D 的度量方陣 $T(z, \bar{z})$ 在 D 中任一点 z 是定正的.

証. 取任一点 $t \in D$, 由上节之公式(2.4.16)知,有一适合条件(2.4.14)的极小函数 $f(z)$,其极小値为

$$\int_D |f|^2 \dot{z} = \frac{1}{K(t,\bar{t}) \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} T_{\alpha\bar{\beta}}(t,\bar{t}) u_\alpha \bar{u}_\beta}.$$

由于 $0 < \int_D |f|^2 \dot{z} < \infty$ 及 $K(t, \bar{t}) > 0$ (定理 2.3.1)可知对任一組不全为零的复数 $u = (u_1, \cdots, u_n)$,

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} T_{\alpha\bar{\beta}}(t,\bar{t}) u_\alpha \bar{u}_\beta = u T \bar{u}' > 0.$$

定理証明.

定理 2.5.2. 設

$$w_1 = \varphi_1(z), \cdots, w_n = \varphi_n(z)$$

是一把有界域 D 一一地映为一有界域 D_1 的解析变换,則域 D 与域 D_1 的度量方陣 $T_D(z, \bar{z})$ 与 $T_{D_1}(w, \bar{w})$ 有下列的关系:

$$T_D(z, \bar{z}) = \frac{\partial w}{\partial z} T_{D_1}(w, \bar{w}) \overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}, \qquad (2.5.4)$$

其中 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 表一 $n \times n$ 方陣

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial z_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial w_1}{\partial z_n} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial(w_1, \cdots, w_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}. \qquad (2.5.5)$$

證. 命 $K_D(z,\bar{z})$ 与 $K_{D_1}(w,\bar{w})$ 分别为域 D 及 D_1 的核函数，由定理 2.3.7 知

$$\log K_D(z,\bar{z}) = \log K_{D_1}(w,\bar{w}) + \log \det \frac{\partial w}{\partial z} + \log \det \overline{\frac{\partial w}{\partial z}},$$

因之

$$\frac{\partial^2 \log K_D(z,\bar{z})}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K_{D_1}(w,\bar{w})}{\partial w_\lambda \partial \bar{w}_\mu} \frac{\partial w_\lambda}{\partial z_\alpha} \overline{\frac{\partial w_\mu}{\partial z_\beta}}.$$

由此得定理.

定理 2.5.3. 設 t 为有界域 D 的一点，命 E_t 代表在域 D 解析的函数类，其中每一函数 $h(z)$ 适合下面条件

$$h(t) = 0, \int_D |h(z)|^2 \dot{z} \leqslant \frac{1}{K(t,\bar{t})}, \tag{2.5.6}$$

则 D 的 Bergmann 度量 ds^2 在 t 点能表为

$$ds^2 = \sup_{h \in E_t} \left| \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial h(z)}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \right|^2_{z=t} = \sup_{h \in E_t} \left| dh(z) \right|^2_{z=t}.$$

證. 命 $u = (u_1, \cdots, u_n)$ 为一組不全为零的复数，命

$$F(z) = \{uT(t,\bar{t})\bar{u}'\}^{\frac{1}{2}} f(z),$$

其中 $f(z)$ 为由(2.4.16)定义的极小函数. 由(2.4.17)知

$$\int_D |F(z)|^2 \dot{z} = \frac{1}{K(t,\bar{t})};$$

又由(2.4.16)知，$F(t) = 0$，因此 $F(z) \in E_t$，故

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_\alpha} u_\alpha \right|^2_{z=t} \leqslant \sup_{h \in E_t} \left| \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial h(z)}{\partial z_\alpha} u_\alpha \right|^2_{z=t}.$$

另一方面，由(2.4.16)可得

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_\alpha} u_\alpha \right|^2_{z=t} = uT(t,\bar{t})\bar{u}',$$

故有

$$uT(t,\bar{t})\bar{u}' \leqslant \sup_{h \in E_t} \left| \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial h(z)}{\partial z_\alpha} u_\alpha \right|^2_{z=t}. \tag{2.5.7}$$

但如果 $h(z) \in E_t$，则函数

$$\frac{h(z)}{\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial h(z)}{\partial z_\alpha}u_\alpha\right]_{z=t}}$$

适合条件(2.4.14). 因之有

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial h(z)}{\partial z_\alpha}u_\alpha\right|^2_{z=t}\leqslant\frac{\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial h(z)}{\partial z_\alpha}u_\alpha\right|^2_{z=t}}{K(t,\bar{t})\int_D|h(z)|^2\dot{z}}=$$

$$=\frac{1}{K(t,\bar{t})}\left\{\int_D\left|\frac{h(z)}{\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial h(z)}{\partial z_\alpha}u_\alpha\right]_{z=t}}\right|^2\dot{z}\right\}^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{K(t,\bar{t})}\left\{\int_D|f(z)|^2\dot{z}\right\}^{-1}=uT(t,\bar{t})\bar{u}'.$$

上式对任一 $h(z)\in E_t$ 皆成立,因此

$$\sup_{h\in E_t}\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial h(z)}{\partial z_\alpha}u_\alpha\right|^2_{z=t}\leqslant uT(t,\bar{t})\bar{u}'. \qquad (2.5.8)$$

由(2.5.7)及(2.5.8)得知

$$uT(t,\bar{t})\bar{u}'=\sup_{h\in E_t}\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial h(z)}{\partial z_\alpha}u_\alpha\right|^2_{z=t}.$$

把 u_α 换为 dz_α, 即得定理.

現在我們命 T 的逆方陣 T^{-1} 之元素为 $T^{\bar{\lambda}\mu}(\lambda,\mu=1,\cdots,n)$, 又命

$$R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}}=-\frac{\partial^2T_{\lambda\bar{\alpha}}}{\partial z_\mu\partial\bar{z}_\beta}+\sum_{\sigma,\nu=1}^{n}T^{\bar{\sigma}\nu}\frac{\partial T_{\mu\bar{\sigma}}}{\partial z_\lambda}\frac{\partial T_{\nu\bar{\beta}}}{\partial\bar{z}_\alpha}, \qquad (2.5.9)$$

$(\lambda,\mu,\alpha,\beta=1,\cdots,n)$, 这称为域 D 的**酉曲率张量**. 易見有下之关系:

$$R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}}=R_{\bar{\alpha}\mu\lambda\bar{\beta}},\quad R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}}=R_{\bar{\beta}\lambda\mu\bar{\alpha}}.$$

命

$$w(z,dz)=\sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu=1}^{n}R_{\bar{\alpha}\lambda\mu\bar{\beta}}(z,\bar{z})\overline{dz_\alpha}\,dz_\lambda\,dz_\mu\,\overline{dz_\beta}, \qquad (2.5.10)$$

这称为**酉四次型**. 又

$$\Omega(z, dz) = \frac{w(z, dz)}{\{dzT(z, \bar{z})\overline{dz}'\}^2}, \tag{2.5.11}$$

称为域D在z点的对向量dz的**酉曲率**.

若我們定义对一矩陣的微分为对此矩陣的各元素微分后所得的矩陣,则(2.5.10)可书为$\left(这里\ d=\sum_{a=1}^{n} dz_a \frac{\partial}{\partial z_a},\ \bar{d} = \sum_{a=1}^{n} d\bar{z}_a \frac{\partial}{\partial \bar{z}_a}\right)$

$$w(z, dz) = dz(-\bar{d}dT + dT \cdot T^{-1}\overline{dT}')\overline{dz}' =$$
$$= - dz[\bar{d}(dT \cdot T^{-1})]T\overline{dz}', \tag{2.5.12}$$

因为 $dT^{-1} = - T^{-1}dT \cdot T^{-1}$.

定理 2.5.4. 設解析变换

$$w_1 = \varphi_1(z), \cdots, w_n = \varphi_n(z)$$

把有界域D一一地映为一有界域 D_1, $w_D(z, dz)$ 与 $w_{D_1}(w, dw)$ 分别是域 D 与 D_1 的酉四次型,则有

$$w_{D_1}(w, dw) = w_D(z, dz).$$

証. 显然有

$$dw = dz\frac{\partial w}{\partial z},$$

其中$\frac{\partial w}{\partial z}$是由(2.5.5)定义的方陣. 根据(2.5.4)有

$$dT_D = d\frac{\partial w}{\partial z} \cdot T_{D_1}\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}} + \frac{\partial w}{\partial z}dT_{D_1} \cdot \overline{\frac{\partial w'}{\partial z}},$$

故

$$dT_D \cdot T_D^{-1} = \frac{\partial w}{\partial z}(dT_{D_1} \cdot T_{D_1}^{-1})\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} + d\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}.$$

因之

$$\bar{d}(dT_D \cdot T_D^{-1}) = \frac{\partial w}{\partial z}\bar{d}(dT_{D_1} \cdot T_{D_1}^{-1})\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1}.$$

由此知

$$\bar{d}(dT_D \cdot T_D^{-1})T_D = \frac{\partial w}{\partial z}\bar{d}(dT_{D_1} \cdot T_{D_1}^{-1})T_{D_1}\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}$$

或

$$dz\bar{d}(dT_D \cdot T_D^{-1})T_D\overline{dz}' = dw\bar{d}(dT_{D_1} \cdot T_{D_1}^{-1})T_{D_1}\overline{dw}'.$$

定理証明.

定理 2.5.5. 有界域D的酉曲率恆$\leqslant 2$.

証. 命 $\{\varphi_k(z)\}$ 为 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的一完备正交就范系. 以$K(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2$ 代入(2.5.1)可得

$$T_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z}) = $$
$$= \frac{1}{K^2(z,\bar{z})} \sum_{l<k} \left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_\alpha} - \varphi_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_\alpha}\right) \overline{\left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_\beta} - \varphi_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_\beta}\right)},$$
$$\alpha, \beta = 1, \cdots, n. \tag{2.5.13}$$

把指标偶 (l, k) $(l < k)$ 安排一次序 $(0,1)$ $(0,2)$, $\cdots$, 而以一个指标m表之,故可命

$$u_\alpha^{(m)}(z) = \varphi_k(z) \frac{\partial \varphi_l(z)}{\partial z_\alpha} - \varphi_l(z) \frac{\partial \varphi_k(z)}{\partial z_\alpha}, \tag{2.5.14}$$

其中

$$m = l + \frac{1}{2} k(k-1). \tag{2.5.15}$$

又命

$$N = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \cdots u_1^{(m)} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n^{(1)} \cdots u_n^{(m)} \cdots \end{pmatrix}. \tag{2.5.16}$$

这是一有限行无穷列之矩陣,其元素皆为在D解析的函数. 于是(2.5.13)可书为

$$T(z, \bar{z}) = \frac{1}{K^2(z, \bar{z})} N\bar{N}'. \tag{2.5.17}$$

命

$$T_1 = N\bar{N}', \ \lambda = K^2(z, \bar{z}), \tag{2.5.18}$$

则(2.5.17)可书为

$$T_1 = \lambda T.$$

由計算可知

$$\bar{d}dT_1 - dT_1 \cdot T_1^{-1}\overline{dT_1'} =$$
$$= \lambda(\bar{d}dT - dT \cdot T^{-1}\overline{dT'}) + \lambda T \bar{d}d \log \lambda.$$

以 $\lambda = K^2(z,\bar{z})$代入上式,并以$(dzT\overline{dz'})^2$除等式的左右两端,

便得

$$\frac{\bar{d}dT_1 - dT_1 \cdot T^{-1}\overline{dT_1'}}{(dzT\overline{dz}')^2} = -K^2(z,\bar{z})\frac{-\bar{d}dT + dT \cdot T^{-1}\overline{dT'}}{(dzT\overline{dz}')^2} + \\ + \frac{2K^2(z,\bar{z})T}{dzT\overline{dz}'}.$$

由此得

$$\mathfrak{Ru}(z, dz) = 2 - \frac{dz(\bar{d}dT_1 - dT_1 \cdot T_1^{-1}\overline{dT_1'})\overline{dz}'}{K^2(z,\bar{z})(dzT\overline{dz}')^2}. \quad (2.5.19)$$

由(2.5.18)知

$$dz(\bar{d}dT_1 - dT_1 \cdot T_1^{-1}\overline{dT_1'})\overline{dz}' =$$

$$= dz[dN\overline{dN}' - dN \cdot \bar{N}'(N\bar{N}')^{-1}N\overline{dN}']\overline{dz}' =$$

$$= dzdN[I^{(\infty)} - \bar{N}'(N\bar{N}')^{-1}N]\overline{dN}'\overline{dz}' =$$

$$= dzdN[I^{(\infty)} - \bar{N}'(N\bar{N}')^{-1}N]\overline{[I^{(\infty)} - \bar{N}'(N\bar{N}')^{-1}N]}'\overline{dN}'\overline{dz}' \geqslant$$

$$\geqslant 0,$$

其中 $I^{(\infty)}$ 表无穷行列的么方陣，即只有对角綫上之元素为 1 而所有其他元素为零者．由(2.5.19)可知

$$\mathfrak{Ru}(z, dz) \leqslant 2.$$

定理証明．

例． (i) 多圓柱 $P_n = \{|z_1| < 1, \cdots, |z_n| < 1\}$ 的 Bergmann 度量为

$$ds^2 = 2\left\{\frac{|dz_1|^2}{(1-|z_1|^2)^2} + \cdots + \frac{|dz_n|^2}{(1-|z_n|^2)^2}\right\}, \quad (2.5.20)$$

因之酉曲率为

$$\Omega(z, dz) = -\frac{\dfrac{|dz_1|^4}{(1-|z_1|^2)^4} + \cdots + \dfrac{|dz_n|^4}{(1-|z_n|^2)^4}}{\left\{\dfrac{|dz_1|^2}{(1-|z_1|^2)^2} + \cdots + \dfrac{|dz_n|^2}{(1-|z_n|^2)^2}\right\}^2}. \quad (2.5.21)$$

*(ii) 单位超球 $S_n = \{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}$ 的 Bergmann 度量为

$$ds^2=(n+1)\frac{\left(1-\sum_{\alpha=1}^{n}|z_\alpha|^2\right)\sum_{\beta=1}^{n}|dz_\beta|^2+\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\bar{z}_\alpha dz_\alpha\right|^2}{\left(1-\sum_{\alpha=1}^{n}|z_\alpha|^2\right)^2},$$

(2.5.22)

因之酉曲率为

$$\Omega(z,dz)=-\frac{2}{n+1}. \tag{2.5.23}$$

命

$$R_{\mu\bar\beta}=\sum_{\alpha,\lambda=1}^{n}T^{\bar\alpha\lambda}R_{\bar\alpha\lambda\mu\bar\beta}, \tag{2.5.24}$$

这称为域D的 Ricci 张量. 由(2.5.9)可知

$$R_{\mu\bar\beta}=-\sum_{\lambda,\alpha=1}^{n}T^{\bar\alpha\lambda}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\bar z_\beta}\left(\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial T_{\lambda\bar\sigma}}{\partial z_\mu}T^{\bar\sigma\nu}\right)\right]T_{\nu\bar\alpha}\right\}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\bar z_\beta}\left(\sum_{\nu,\sigma=1}^{n}\frac{\partial T_{\nu\bar\sigma}}{\partial z_\mu}T^{\bar\sigma\nu}\right)=-\frac{\partial}{\partial\bar z_\beta}\left(\frac{1}{\det T}\frac{\partial\det T}{\partial z_\mu}\right),$$

因之 Ricci 张量可以书为

$$R_{\mu\bar\beta}=-\frac{\partial^2\log\det T}{\partial z_\mu\partial\bar z_\beta}. \tag{2.5.25}$$

由此及定理 2.5.2 易知

定理 2.5.6. 若有一解析变换 $w_\alpha=\varphi_\alpha(z)$ $(\alpha=1,\cdots,n)$ 把域D一一地映为一有界域 D_1, 而 $R^{(1)}_{\mu\bar\beta}$ 为域 D_1 的 Ricci 张量, 则

$$R_{\mu\bar\beta}=\sum_{\lambda,\alpha=1}^{n}R^{(1)}_{\lambda\bar\alpha}\frac{\partial w_\lambda}{\partial z_\mu}\overline{\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_\beta}}. \tag{2.5.26}$$

域D的 Ricci 曲率定义为

$$-\frac{\sum_{\mu,\beta=1}^{n}R_{\alpha\bar\beta}dz_\alpha\overline{dz_\beta}}{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}T_{\alpha\bar\beta}dz_\alpha\overline{dz_\beta}}. \tag{2.5.27}$$

由(2.5.1)及(2.5.25)知,上式可书为

$$-\frac{\bar dd\log\det T}{\bar dd\log K}. \tag{2.5.28}$$

§ 2.6. **測地綫.** 設 $z^{(0)}$ 与 $z^{(1)}$ 为有界域D的任两固定点，过此两点有在D内的曲綫 C:

$$z_\alpha = z_\alpha(t), \quad t \text{ 为实参数}, \ \alpha = 1, \cdots, n,$$

其中 $z_\alpha = z_\alpha(t)$ 是 t 的在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 中有二阶連續微分的函数，并且

$$z_\alpha^{(0)} = z_\alpha(t_0), \quad z_\alpha^{(1)} = z_\alpha(t_1).$$

曲綫C对于 Bergmann 度量的长度为

$$s = \int_C ds = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} T_{\alpha\overline{\beta}} \frac{dz_\alpha}{dt} \overline{\frac{dz_\beta}{dt}} \right\}^{1/2} dt. \tag{2.6.1}$$

为簡便起見，命

$$\dot{z}_\alpha = \frac{dz_\alpha}{dt}, \ \varphi(z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}}) = \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} T_{\alpha\overline{\beta}} \dot{z}_\alpha \dot{\bar{z}}_\beta \right\}^{1/2}, \tag{2.6.2}$$

而书(2.6.1)为

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}}) dt. \tag{2.6.1$'$}$$

假定有另一在D中的过 $z^{(0)}$ 与 $z^{(1)}$ 的曲綫 C^*:

$$z_\alpha^* = z_\alpha(t) + \varepsilon\omega_\alpha(t), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{2.6.3}$$

其中 ε 为一无穷小变量，$\omega_\alpha(t)$ 是 t 的有二阶連續微分的函数，并且

$$\omega_\alpha(t_0) = \omega_\alpha(t_1) = 0, \ \alpha = 1, \cdots, n. \tag{2.6,4}$$

曲綫 C^* 之长度为

$$s^* = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(z^*, \bar{z}^*, \dot{z}^*, \dot{\bar{z}}^*) dt.$$

两曲綫 C 及 C^* 之长度之差为

$$\sigma^* - \sigma = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} [\varphi(z^*, \bar{z}^*, \dot{z}^*, \dot{\bar{z}}^*) - \varphi(z, \bar{z}, \dot{z}, \dot{\bar{z}})] dt.$$

把上式积分号下的函数以 Taylor 級数展开之，得

$$\sigma^* - \sigma = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\beta=1}^{n} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z_\beta} \omega_\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}_\beta} \bar{\omega}_\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial \dot{z}_\beta} \dot{\omega}_\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial \dot{\bar{z}}_\beta} \dot{\bar{\omega}}_\beta \right] dt + \varepsilon^2 R_2.$$

应用部分积分有

$$\sigma^*-\sigma=\varepsilon\int_{t_0}^{t}\sum_{\beta=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_\beta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot z_\beta}\right)\omega_\beta+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_\beta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\bar z}_\beta}\right)\bar\omega_\beta\right]dt$$

$$+\varepsilon^2R_2.$$

如果曲綫C有如下的性质：对任意的 $\omega_\beta(t)$，上式 ε 之系数恆为零，换言之，$z_\alpha(t)$ 适合微分方程組

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_\beta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\bar z}_\beta}=0,\quad\beta=1,\cdots,n,\tag{2.6.5}$$

則C称为域D的对于 Bergmann 度量的**測地綫**.

由(2.6.2)可知

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_\gamma}=\frac{\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial T_{\alpha\bar\beta}}{\partial\bar z_\gamma}\dot z_\alpha\dot{\bar z}_\beta}{2\frac{ds}{dt}}$$

及

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\bar z}_\gamma}=\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}T_{\alpha\bar\gamma}\ddot z_\alpha}{2\frac{ds}{dt}}+\frac{\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial T_{\alpha\bar\gamma}}{\partial z_\beta}\dot z_\beta+\frac{\partial T_{\alpha\bar\gamma}}{\partial\bar z_\beta}\dot{\bar z}_\beta\right)\dot z_\alpha}{2\frac{ds}{dt}}-$$

$$-\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}T_{\alpha\bar\gamma}\dot z_\alpha}{2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

若我們取曲綫C之参数 $t=s$，則有

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\bar z}_\gamma}-\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_\gamma}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n}T_{\alpha\bar\gamma}\ddot z_\alpha+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial T_{\alpha\bar\gamma}}{\partial z_\beta}\dot z_\alpha\dot z_\beta\right\}.$$

以 $2T^{\bar\gamma\lambda}$ 乘上式，并对γ从1至n而加之，便知測地綫方程可书为如下之形式：

$$\frac{d^2z_\lambda}{ds^2}+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\frac{dz_\alpha}{ds}\frac{dz_\beta}{ds}=0,\ \lambda=1,\cdots,n,\tag{2.6.6}$$

其中

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}=\sum_{\gamma=1}^{n}T^{\bar\gamma\lambda}\frac{\partial T_{\alpha\bar\gamma}}{\partial z_\beta}.\tag{2,6,7}$$

定理 2.6.1. 設解析変換 T:

$$z_\alpha^* = \varphi_\alpha(z), \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

把域 D 一一地映为一有界域 D^*，而 C 是域 D 的測地綫，則 C 之映象 C^* 是域 D^* 的測地綫.

証. 域 D 的測地綫 C:

$$z_\alpha = z_\alpha(s), \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

經变换 T 映为 C^*:

$$z_\alpha^* = \varphi_\alpha(z(s)), \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

由于 Bergmann 长度 s 是不变的（定理 2.5.2），我們只須証明 $z_\alpha^*(s)$ 适合微分方程

$$\frac{d^2 z_\lambda^*}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^n \overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} \frac{dz_\alpha^*}{ds} \overline{\frac{dz_\beta^*}{ds}} = 0, \quad \lambda = 1, \cdots, n,$$

其中

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^n \overset{*}{T}{}^{\bar\gamma\lambda} \frac{\partial \overset{*}{T}_{\alpha\bar\gamma}}{\partial z_\beta},$$

而 $\overset{*}{T}_{\alpha\bar\beta}$ 为域 D^* 的度量方陣之元素.

根据假設，$z_\alpha(s)$ 适合微分方程(2.6.6)，实际上我們只要証明方程組(2.6.6)經解析变换 T 不变.

根据定理 2.5.2,

$$T_{\alpha\bar\gamma} = \sum_{\nu,\mu=1}^n \overset{*}{T}_{\nu\bar\mu} \frac{\partial z_\nu^*}{\partial z_\alpha} \overline{\frac{\partial z_\mu^*}{\partial z_\gamma}}, \quad T^{\bar\gamma\lambda} = \sum_{\sigma,\tau=1}^n \overset{*}{T}{}^{\bar\sigma\tau} \frac{\partial z_\lambda}{\partial z_\tau^*} \overline{\frac{\partial z_\gamma}{\partial z_\sigma^*}}.$$

由此，經計算可得

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu,\tau=1}^n \overset{*}{\Gamma}{}^\tau_{\nu\mu} \frac{\partial z_\lambda}{\partial z_\tau^*} \frac{\partial z_\nu^*}{\partial z_\alpha} \frac{\partial z_\mu^*}{\partial z_\beta} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 z_\nu^*}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \frac{\partial z_\lambda}{\partial z_\nu^*};$$

另一方面，

$$\frac{d^2 z_\lambda}{ds^2} = \sum_{\tau=1}^n \frac{\partial z_\lambda}{\partial z_\tau^*} \frac{d^2 z_\tau^*}{ds^2} + \sum_{\sigma,\tau=1}^n \frac{\partial^2 z_\lambda}{\partial z_\sigma^* \partial z_\tau^*} \frac{dz_\sigma^*}{ds} \frac{dz_\tau^*}{ds}.$$

由上两式及下面之恆等式:

$$\frac{\partial}{\partial z_\sigma^*}\left(\frac{\partial z_\lambda}{\partial z_\tau^*}\right) = -\sum_{\nu,\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial^2 z_\nu^*}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \frac{\partial z_\lambda}{\partial z_\nu^*} \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\tau^*} \frac{\partial z_\beta}{\partial z_\sigma^*}$$

可得

$$\frac{d^2 z_\lambda}{ds^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{dz_\alpha}{ds} \frac{dz_\beta}{ds} =$$

$$= \sum_{\tau=1}^{n} \left(\frac{d^2 z^*_\tau}{ds^2} + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\nu\mu} \frac{dz^*_\nu}{ds} \frac{dz^*_\mu}{ds} \right) \frac{\partial z_\lambda}{\partial z^*_\tau},$$

上式左端等于零，而 $\left(\frac{\partial z_\lambda}{\partial z^*_\tau}\right)$ 之行列式不为零(定理 1.6.6)，故必須

$$\frac{d^2 z^*_\tau}{ds^2} + \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \overset{*}{\Gamma}{}^\lambda_{\nu\mu} \frac{dz^*_\nu}{ds} \frac{dz^*_\mu}{ds} = 0.$$

此为所欲証.

§ 2.7. 单参数的解析变换羣. 設有依賴于一个实参数 t 的一族解析变换:

$$z^*_\alpha = \varphi_\alpha(z; t), \quad \alpha = 1, \cdots, n, \quad |t| < r, \tag{2.7.1}$$

对每一 t 值，变换(2.7.1)皆是把有界域 D 一一地映为自己. 此外，設 $\varphi_\alpha(z; t)$ 适合下面的条件:

(i) $\varphi_\alpha(z; t)$ 是变数 $z_1, \cdots, z_n$ 及 t 的連續函数. 对变数 $z_1, \cdots, z_n$, $\varphi_\alpha(z; t)$ 是在域 D 的复解析函数，对实参数 t, $\varphi_\alpha(z; t)$ 是实的解析函数.

(ii) (2.7.1)的所有变换成一羣，并且有

$$\varphi_\alpha(\varphi(z; t_1); t_2) = \varphi_\alpha(z, t_1 + t_2), \quad \varphi_\alpha(z; 0) = z_\alpha, \tag{2.7.2}$$

此时(2.7.1)的所有变换称为单参数的解析变换羣[1)]，而称域 D 容許有一单参数解析变换羣.

定理 2.7.1. 单参数解析变换羣 (2.7.1) 必定适合下面的常微分方程組

$$\frac{dz^*_\alpha}{dt} = \xi_\alpha(z^*), \tag{2.7.3}$$

其中 $\xi_\alpha(z^*)$ 是只包含 $z^*_1, \cdots, z^*_n$ 的在 D 解析的函数.

証. 根据假設有

1) 单参数解析变换羣不一定要适合(2.7.2)的条件. 这里定义的单参数解析变换羣对参数已經取了标准坐标.

$$\varphi_\alpha(\varphi(z; t); t_1 - t) = \varphi_\alpha(z; t_1).$$

对 t 微分得

$$\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha(z^*; t_1 - t)}{\partial z_\beta^*} \frac{dz_\beta^*}{dt} + $$
$$+ \frac{\partial \varphi_\alpha(z^*; t_1 - t)}{\partial (t_1 - t)} \frac{d(t_1 - t)}{dt} = 0.$$

再命 $t_1 = t$, 并由(2.7.2)有

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(z^*; 0)}{\partial z_\beta^*} = \delta_{\alpha\beta},$$

故有

$$\frac{dz_\alpha^*}{dt} = \left[\frac{\partial \varphi_\alpha(z^*; t)}{\partial t}\right]_{t=0}.$$

命 $\xi_\alpha(z^*) = \left[\frac{\partial \varphi_\alpha(z^*; t)}{\partial t}\right]_{t=0}$,便得定理.

由(2.7.3)可知,(2.7.1)在 $t = 0$ 的邻域有展式

$$z_\alpha^* = \varphi_\alpha(z; t) = z_\alpha + \xi_\alpha(z)t + $$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \xi_\alpha(z)}{\partial z_\beta} \xi_\beta(z) t^2 + \cdots, \qquad (2.7.4)$$

其中 $(\xi_1(z), \cdots, \xi_n(z))$ 称为单参数解析变换羣(2.7.1)的 Killing 向量.

定理 2.7.2. 若有界域 D 容許单参数解析变换羣 (2.7.1), 则 Killing 向量必須满足下面的 Killing 方程

$$\sum_{\gamma=1}^{n} \left(\frac{\partial T_{\alpha\bar\beta}}{\partial z_\gamma} \xi_\gamma + \frac{\partial T_{\alpha\bar\beta}}{\partial \bar z_\gamma} \bar\xi_\gamma + T_{\gamma\bar\beta} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial z_\alpha} + T_{\alpha\bar\gamma} \overline{\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial z_\beta}}\right) = 0, \quad (2.7.5)$$

$\alpha, \beta = 1, \cdots, n$. 此外,

$$\sum_{\gamma=1}^{n} \left(\xi_\gamma \frac{\partial \log K}{\partial z_\gamma} + \bar\xi_\gamma \frac{\partial \log K}{\partial \bar z_\gamma}\right) \qquad (2.7.6)$$

在域 D 必定是 B-調和函数,此处 K 是域 D 的核函数,而

$$T_{\alpha\bar\beta} = \frac{\partial^2 \log K}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta}.$$

証. 由于解析变换(2.7.1)把 D 一一地映为自己,故根据定理

2.5.2 知，有关系

$$T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z})-\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}T_{\lambda\bar{\mu}}(z^*,\overline{z^*})\frac{\partial z_\lambda^*}{\partial z_\alpha}\overline{\frac{\partial z_\mu^*}{\partial z_\beta}}=0. \qquad (2.7.7)$$

我們取 t 之絕对值充分小，由(2.7.4)可知

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}T_{\lambda\bar{\mu}}(z^*,\overline{z^*})\frac{\partial z_\lambda^*}{\partial z_\alpha}\overline{\frac{\partial z_\mu^*}{\partial z_\beta}}=$$

$$=\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}\left\{T_{\lambda\bar{\mu}}(z,\bar{z})+\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial T_{\lambda\bar{\mu}}(z,\bar{z})}{\partial z_\gamma}(z_\gamma^*-z_\gamma)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial T_{\lambda\bar{\mu}}(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}_\gamma}(\overline{z_\gamma^*}-\overline{z_\gamma})+\cdots\right\}\left\{\delta_{\lambda\alpha}+\frac{\partial\xi_\lambda}{\partial z_\alpha}t+\cdots\right\}\times$$

$$\times\left\{\delta_{\mu\beta}+\overline{\frac{\partial\xi_\mu}{\partial z_\beta}}t+\cdots\right\}=\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}\left\{T_{\lambda\bar{\mu}}(z,\bar{z})+\right.$$

$$\left.+\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\frac{\partial T_{\lambda\bar{\mu}}(z,\bar{z})}{\partial z_\gamma}\xi_\gamma+\frac{\partial T_{\lambda\bar{\mu}}(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}_\gamma}\bar{\xi}_\gamma\right)t+\cdots\right\}\left\{\delta_{\lambda\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\xi_\lambda(z)}{\partial z_\alpha}t+\cdots\right\}\left\{\delta_{\mu\beta}+\overline{\frac{\partial\xi_\mu}{\partial z_\beta}}t+\cdots\right\}=T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z})+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\frac{\partial T_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z_\gamma}\xi_\gamma+\frac{\partial T_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial\bar{z}_\gamma}\bar{\xi}_\gamma+T_{\gamma\bar{\beta}}\frac{\partial\xi_\gamma}{\partial z_\alpha}+T_{\alpha\bar{\gamma}}\overline{\frac{\partial\xi_\gamma}{\partial z_\beta}}\right)t+\cdots.$$

以之代入(2.7.7)，再比較 t 之系数，便得(2.7.5).

又由 $T_{\alpha\bar{\beta}}$ 之定义可知

$$\frac{\partial T_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z_\gamma}=\frac{\partial T_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial z_\alpha},$$

故 Killing 方程又可书为

$$0=\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\left(\sum_{\gamma=1}^{n}T_{\gamma\bar{\beta}}\xi_\gamma\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}_\beta}\left(\sum_{\gamma=1}^{n}T_{\alpha\bar{\gamma}}\bar{\xi}_\gamma\right)=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\xi_\gamma\frac{\partial\log K}{\partial z_\gamma}+\bar{\xi}_\gamma\frac{\partial\log K}{\partial\bar{z}_\gamma}\right).$$

此乃表示 $\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\xi_\gamma\frac{\partial\log K}{\partial z_\gamma}+\bar{\xi}_\gamma\frac{\partial\log K}{\partial\bar{z}_\gamma}\right)$ 是 B-調和函数. 定理証

明.

定理 2.7.3. 若有界域D容許单参数解析变换羣(2.7.1),又若$\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$是$D$的一固定点,则 Killing 向量在$\zeta$的邻域可表为

$$\xi_\alpha(z)=\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}T^{\bar{\mu}\alpha}(z,\bar{\zeta})\left\{\xi_\lambda(\zeta)\frac{\partial^2\log K(\zeta,\bar{\zeta})}{\partial\zeta_\lambda\partial\bar{\zeta}_\mu}-\right.$$

$$\left.-\overline{\xi_\lambda(\zeta)}\frac{\partial\log\dfrac{K(z,\bar{\zeta})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}}{\partial\bar{\zeta}_\mu\partial\bar{\zeta}_\lambda}-\frac{\partial\overline{\xi_\lambda(\zeta)}}{\partial\bar{\zeta}_\mu}\frac{\partial\log\dfrac{K(z,\bar{\zeta})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}}{\partial\bar{\zeta}_\lambda}\right\}.\quad(2.7.8)$$

証. 根据定理 2.7.2 知,存在D中的解析函数$\varphi(z)$使得

$$\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\xi_\gamma(z)\frac{\partial\log K(z,\bar{z})}{\partial z_\gamma}+\overline{\xi_\gamma(z)}\frac{\partial\log K(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}_\gamma}\right)=\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}.$$

由于$K(z,\bar{v})$是z与$\bar{v}$的在D解析的函数,而$K(\zeta,\bar{\zeta})>0$,故在ζ的充分小邻域中$K(z,\bar{v})\neq0$,于是$\log K(z,\bar{v})$在此邻域解析.根据定理 1.2.4 可知,把上式$\bar{z}$换为独立之变数$\bar{v}=(\bar{v}_1,\cdots,\bar{v}_n)$此式仍然成立,即

$$\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\xi_\gamma(z)\frac{\partial\log K(z,\bar{v})}{\partial z_\gamma}+\overline{\xi_\gamma(v)}\frac{\partial\log K(z,\bar{v})}{\partial\bar{v}_\gamma}\right)-$$

$$-\varphi(z)-\overline{\varphi(v)}=0.$$

命上式左端为$\Phi(z,\bar{v})$,由

$$\Phi(z,\bar{\zeta})+\Phi(\zeta,\bar{v})-\Phi(z,\bar{v})-\Phi(\zeta,\bar{\zeta})=0$$

可得

$$\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\xi_\gamma(z)\frac{\partial\log\dfrac{K(z,\bar{\zeta})}{K(z,\bar{v})}}{\partial z_\gamma}+\xi_\gamma(\zeta)\frac{\partial\log\dfrac{K(\zeta,\bar{v})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}}{\partial\zeta_\gamma}+\right.$$

$$\left.+\overline{\xi_\gamma(\zeta)}\frac{\partial\log\dfrac{K(z,\bar{\zeta})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}}{\partial\bar{\zeta}_\gamma}-\overline{\xi_\gamma(v)}\frac{\partial\log\dfrac{K(z,\bar{v})}{K(\zeta,\bar{v})}}{\partial\bar{v}_\gamma}\right)=0.$$

取一固定之整数$\mu(1\leqslant\mu\leqslant n)$,以$\Delta\bar{\zeta}_\mu$除上式,而以

$$\bar{v}_\mu=\bar{\zeta}_\mu+\Delta\bar{\zeta}_\mu,\quad\bar{v}_\alpha=\bar{\zeta}_\alpha\quad(\alpha\neq\mu)$$

代入. 命 $\Delta\bar{\zeta}_\mu \to 0$, 我們有

$$\sum_{\gamma=1}^{n}\left(-\xi_\gamma(z)\frac{\partial^2\log K(z,\bar{\zeta})}{\partial z_\gamma\partial\bar{\zeta}_\mu}+\xi_\gamma(\zeta)\frac{\partial\log K(\zeta,\bar{\zeta})}{\partial\zeta_\gamma\partial\bar{\zeta}_\mu}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_\mu}\left\{\overline{\xi_\gamma(\zeta)}\frac{\partial\log\dfrac{K(z,\bar{\zeta})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}}{\partial\bar{\zeta}_\gamma}\right\}\right)=0. \qquad (2.7.9)$$

由于

$$T_{\gamma\bar{\mu}}(z,\bar{\zeta})=\frac{\partial^2\log K(z,\bar{\zeta})}{\partial z_\gamma\partial\bar{\zeta}_\mu}$$

及

$$\sum_{\mu=1}^{n}T^{\bar{\mu}\lambda}(z,\bar{z})T_{\gamma\bar{\mu}}(z,\bar{z})=\delta_{\lambda\gamma},$$

再应用定理 1.2.4, 当 z 在 ζ 的充分小邻域中,

$$\sum_{\mu=1}^{n}T^{\bar{\mu}\lambda}(z,\bar{\zeta})T_{\gamma\bar{\mu}}(z,\bar{\zeta})=\delta_{\lambda\gamma}. \qquad (2.7.10)$$

我們以 $T^{\bar{\mu}\lambda}(z,\bar{\zeta})$ 乘(2.7.9)并对 μ 从 1 至 n 而加之,应用(2.7.10)便导出(2.7.8). 定理証明.

定理 2.7.4. 若有界域 D 容許单参数的解析变換羣(2.7.1),并且此等变換皆使域 D 的一定点 ζ 固定不变, 則我們可选取局部坐标

$$w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{n}T^{\bar{\beta}\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\frac{\partial\log\dfrac{K(z,\bar{\zeta})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}}{\partial\bar{\zeta}_\beta}, \qquad (2.7.11)$$

使得对于此坐标 $w_1,\cdots,w_n$, 解析变換 (2.7.1) 为如下形式的綫性变換

$$w^*=we^{At}, \qquad (2.7.12)$$

其中 A 是一 $n\times n$ 常数方陣, $w^*=(w_1,\cdots,w_n)$ 与 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 代表 $1\times n$ 矩陣.

証. 我們以 $z=\zeta$ 代入(2.7.4),根据假設,

$$\zeta_\alpha=\zeta_\alpha+\xi_\alpha(\zeta)t+\cdots,$$

比较 t 之系数便有

$$\xi_{\alpha}(\zeta)=0. \tag{2.7.13}$$

以之代入(2.7.8)得

$$\xi_{\alpha}(z)=-\sum_{\mu,\lambda=1}^{n} T^{\bar{\mu}\alpha}(z,\bar{\zeta})\overline{\frac{\partial\xi_{\lambda}(\zeta)}{\partial\zeta_{\mu}}}\frac{\partial\log\dfrac{K(z,\bar{\zeta})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}}{\partial\bar{\zeta}_{\lambda}}. \tag{2.7.14}$$

变换(2.7.11)之函数行列式为

$$\det\left(\frac{\partial w_{\alpha}}{\partial z_{\beta}}\right)_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n}=\det\left(\sum_{\gamma=1}^{n} T^{\bar{\gamma}\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\frac{\partial^{2}\log K(z,\bar{\zeta})}{\partial z_{\beta}\partial\bar{\zeta}_{\gamma}}\right)_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n}=$$

$$=\det T^{-1}(\zeta,\bar{\zeta})\det T(z,\bar{\zeta}).$$

由(2.7.10)知，在 ζ 的充分小邻域中，上式不为零，故在 ζ 的充分小邻域内变换是一一的.

根据定理 2.7.1，变换 (2.7.1) 适合微分方程(2.7.3)，此方程对新的坐标为

$$\sum_{\beta=1}^{n}\frac{dw_{\beta}^{*}}{dt}\frac{\partial z_{\alpha}^{*}}{\partial w_{\beta}^{*}}=\xi_{\alpha}(z^{*}(w^{*}))$$

或

$$\frac{dw_{\alpha}^{*}}{dt}=\sum_{\beta=1}^{n}\xi_{\beta}(z^{*})\frac{\partial w_{\alpha}^{*}}{\partial z_{\beta}^{*}},$$

其中

$$w_{\alpha}^{*}=\sum_{\beta=1}^{n} T^{\bar{\beta}\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\frac{\partial\log\dfrac{K(z^{*},\bar{\zeta})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}}{\partial\bar{\zeta}_{\beta}}.$$

以(2.7.14)代入上面之微分方程得

$$\frac{dw_{\alpha}^{*}}{dt}=-\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} T^{\bar{\mu}\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\overline{\frac{\partial\xi_{\lambda}(\zeta)}{\partial\zeta_{\mu}}}\frac{\partial\log\dfrac{K(z^{*},\bar{\zeta})}{K(\zeta,\bar{\zeta})}}{\partial\bar{\zeta}_{\lambda}}=$$

$$=\sum_{\beta=1}^{n} a_{\beta\alpha}w_{\beta}^{*},$$

其中

$$a_{\beta\alpha}=-\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} T_{\beta\bar{\lambda}}(\zeta,\bar{\zeta})T^{\bar{\mu}\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\overline{\frac{\partial\xi_{\lambda}(\zeta)}{\partial\zeta_{\mu}}}. \tag{2.7.15}$$

写成矩陣的形式即

$$\frac{dw^*}{dt} = w^* A, \tag{2.7.16}$$

其中

$$A = (a_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\,\beta\leqslant n}.$$

由(2.7.2)知,当 $t=0$, $z_\alpha^* = z_\alpha$, 故必須 $w_\alpha^* = w_\alpha$. 习知在此初值条件下,微分方程(2.9.16)之解为

$$w^* = we^{At}.$$

定理証明.

值得注意的,經变换(2.7.11),在 ζ 的充分小邻域有

$$T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z}) = \sum_{\lambda,\,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K(z(w),z(\overline{w}))}{\partial w_\lambda \partial \overline{w}_\mu} \frac{\partial w_\lambda}{\partial z_\alpha} \overline{\frac{\partial w_\mu}{\partial z_\beta}} =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu,\sigma,\tau=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K(z(w),z(\overline{w}))}{\partial w_\lambda \partial \overline{w}_\mu} T^{\bar{\sigma}\lambda}(\zeta,\bar{\zeta}) \times$$

$$\times T_{\alpha\bar{\sigma}}(z,\bar{\zeta})\, T^{\bar{\mu}\tau}(\zeta,\bar{\zeta}) T_{\tau\bar{\beta}}(\zeta,\bar{z}),$$

或

$$\overset{*}{T}_{\lambda\bar{\mu}}(w,\overline{w}) = \sum_{\alpha,\beta,\sigma,\tau=1}^{n} T_{\alpha\bar{\beta}}(z,\bar{z}) T^{\bar{\sigma}\alpha}(z,\bar{\zeta})\, T^{\bar{\beta}\tau}(\zeta,\bar{z}) \times$$

$$\times T_{\lambda\bar{\sigma}}(\zeta,\bar{\zeta}) T_{\tau\bar{\mu}}(\zeta,\bar{\zeta}), \tag{2.7.17}$$

其中

$$\overset{*}{T}_{\lambda\bar{\mu}}(w,\overline{w}) = \frac{\partial^2 \log K(z(w),z(\overline{w}))}{\partial w_\lambda \partial \overline{w}_\mu}. \tag{2.7.18}$$

根据定理 1.2.4, w, $\overline{w}$ 視为独立变数时(2.7.17)仍成立. 我們命 $\overline{w}_\alpha = 0$, 相应地有 $\bar{z}_\alpha = \bar{\zeta}_\alpha$. 由(2.7.17)得

$$\overset{*}{T}_{\lambda\bar{\mu}}(w,0) = T_{\lambda\bar{\mu}}(\zeta,\bar{\zeta}), \tag{2.7.19}$$

上式表示 $\overset{*}{T}_{\lambda\bar{\mu}}(w,0)$ 与变数 w 无关.

III. 解析映照

§ 3.1. 多复变数空間的解析映照. 設D是 $C^n(z_1, \cdots, z_n)$ 空間的域，D^*是 $C^m(w_1, \cdots, w_m)$ 空間的域，映D入D^*的解析映照T:

$$w_1 = f_1(z_1, \cdots, z_n), \cdots, w_m = f_m(z_1, \cdots, z_n)$$

是由在D解析的函数 $f_1, \cdots, f_m$ 定义，对每一点 $z=(z_1, \cdots, z_n) \in D$，对应有唯一的由 $f_1, \cdots, f_m$ 定义的点 $w = (w_1, \cdots, w_m) \in D^*$. $f_1, \cdots, f_m$ 称为T的映照函数. w 点称为 z 的象点，而 z 点称为w的原象点. 如每一 D^* 的点最少有一在D中的原象点，则映照T称作映D为D^*.

今后如不特别声明，我們将仅考虑 $m = n$ 的情形，此时映照T也称为解析变換. 如解析变換T一一地映D为D^*，则称为解析同胚或伪共形映照. 此时D与D^*称为解析等价. T称为局部一一的或局部同胚的，如每一点$z \in D$有一邻域U_z包含于D中者，T把U_z一一的映为D^*的z的象点w的一个邻域. 根据定理1.6.6知，对于局部同胚的解析映照，其函数行列式必不为零，由此可知[1)]

定理 3.1.1. 若解析变換T在$z^{(0)}$点的函数行列式为零，则$z^{(0)}$的任一邻域中最少有两不同的点a与b映为同一的点.

設 $S_k(k = 1, 2, \cdots)$ 是一串在D定义的解析变換，其映照函数为 $f_1^{(k)}(z), \cdots, f_n^{(k)}(z)$，如是我們有$n$个在$D$解析的函数串 $\{f_1^{(k)}(z)\}, \cdots, \{f_n^{(k)}(z)\}$. 我們称解析变換串$\{S_k\}$收斂、連續收斂、局部一致有界或成一正規族等，是指每一函数串$\{f_\alpha^{(k)}(z)\}$收斂、連續收斂、局部一致有界或成一正規族等.

現在証明关于解析同胚变換的 H. Cartan 唯一性定理.

---

1) 这里我們再次应用拓扑学的 Brouwer 內点定理(参閱 § 1.6, 32 頁注).

定理 3.1.2. 最多存在一个一一对应的解析变換，映一有界域 D 为另一有界域 D^*，把 $a \in D$ 点映为 $a^* \in D^*$，并且映照函数的偏导数在 a 点取已与值.

証. 不妨假定 $a = (0, \cdots, 0)$ 及 $a^* = (0, \cdots, 0)$.

若存在两个变换

$$S: z_\alpha^* = a_{1\alpha}z_1 + \cdots + a_{n\alpha}z_n + \text{高次項}, \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

及

$$S_1: z_\alpha^* = a_{1\alpha}z_1 + \cdots + a_{n\alpha}z_n + \text{高次項}, \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

把 D 一一地映为 D^*，則变换 $T = S_1^{-1}S$ 把域 D 一一地映为自己，其映照函数在原点的展式为

$$T: z_\alpha^* = z_\alpha + P_\alpha(z) + \cdots, \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

其中 $P_\alpha(z)$ 是展式中第一个不恆等于零的 $z_1, \cdots, z_n$ 的齐次多項式.

变换 $T^2 = T \cdot T$ 仍把 D 映为自己，其映照函数有展式

$$T^2: z_\alpha^* = z_\alpha + 2P_\alpha(z) + \cdots, \quad \alpha = 1, \cdots, n;$$

如此継續，可得

$$T^k: z_\alpha^* = z_\alpha + kP_\alpha(z) + \cdots, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

但是变换串 $\{T^k\}$ 是一致有界的. 因为 D 是一有界域，故 T^k 的映照函数的各級偏微分分别是局部一致有界(定理 1.8.3) 而与 k 无关，因此必須 $P_\alpha(z) \equiv 0$. 此卽变换 T 的映照函数为

$$z_\alpha^* = z_\alpha, \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

亦卽 $S = S_1$. 証毕.

§ 3.2. 解析变换串的性質.

定理 3.2.1. 設 $S_1, S_2, \cdots$ 为一串在 D 連續收斂的解析变换，其极限变换为 S. 若有一点 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in D$，并且变换 S 的函数行列式[1]的值不为 0，則存在点 a 的一邻域 U 及一 $a^* = Sa$ 点的邻域 U^*，并有一正数 N，使得当 $k \geqslant N$ 时，所有变换 S_k 在 U 是一一的，并且 U^* 包含于 S_kU 之内.

1) 根据定理 1.8.5 知，S 也是解析变换，因之有函数行列式.

証：为簡便起見，命变换 S 的函数行列式为 $\Delta(z)$，S_k 的函数行列式为 $\Delta_k(z)$.

(i) 由 $\Delta(a) \neq 0$ 可知，有一閉超球 $\bar{S}(a, r)$ 包含于 D 中者，使得变换 S 在此閉超球是一一的。

現在要証明，存在包含于 $\bar{S}(a, r)$ 的閉同心超球 $\bar{S}(a, r_0)$ 及一正数 k_0，使得 $k \geqslant k_0$ 时，所有 S_k 在 $\bar{S}(a, r_0)$ 是一一的。

如若不然，存在一串自然数 $k_1 < k_2 < \cdots$ 及两个收斂于 a 点的点串 $b^{(1)}, b^{(2)}, \cdots$ 与 $c^{(1)}, c^{(2)}, \cdots, S_{k_m}$ 把两不同的点 $b^{(m)} = (b_1^{(m)}, \cdots, b_n^{(m)})$ 与 $c^{(m)} = (c_1^{(m)}, \cdots, c_n^{(m)})$ 映为同一点. 命

$$\sum_{\alpha=1}^{n} |b_\alpha^{(m)} - c_\alpha^{(m)}|^2 = r_m^2,$$

则 $r_m \neq 0$，而

$$\lim_{m\to\infty} r_m = 0.$$

由假設知，S_{k_m} 的映照函数 $f_\alpha^{(k_m)}(z)$，$\alpha = 1, \cdots, n$ 适合

$$f_\alpha^{(k_m)}(b^{(m)}) - f_\alpha^{(b_m)}(c^{(m)}) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n. \qquad (3.2.1)$$

命

$$\beta_\alpha^{(m)} = \frac{c_\alpha^{(m)} - b_\alpha^{(m)}}{r_m} \qquad (3.2.2)$$

及

$$\varphi_\alpha^{(m)}(t) = f_\alpha^{(k_m)}(b_1^{(m)} + \beta_1^{(m)} t, \cdots, b_n^{(m)} + \beta_n^{(m)} t) - f_\alpha^{(k_m)}(b^{(m)}). \qquad (3.2.3)$$

我們不妨假定

$$\lim_{m\to\infty} \beta_\alpha^{(m)} = \beta_\alpha, \qquad (3.2.4)$$

否則可取 $\beta_\alpha^{(m)}$ 的一子串使之趋于一确定的极限。

因 $\{S_{k_m}\}$ 是連續收斂的，故在 t 平面上原点的一邻域中存在极限函数

$$\varphi_\alpha(t) = \lim_{m\to\infty} \varphi_\alpha^{(m)}(t) =$$

$$= f_\alpha(a_1 + \beta_1 t, \cdots, a_n + \beta_n t) - f_\alpha(a),$$

其中 $f_1, \cdots, f_n$ 是变换 S 的映照函数.

由(3.2.1)与(3.2.3)知，

$$\varphi_a^{(m)}(r_m) = \varphi_a^{(m)}(0) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

因此

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\varphi_a^{(m)}(r_m) - \varphi_a^{(m)}(0)}{r_m} = \left[\frac{d\varphi_a(t)}{dt}\right]_{t=0} = 0,$$

此即在 a 点有

$$\beta_1 \left[\frac{\partial f_a}{\partial z_1}\right]_{z=a} + \cdots + \beta_n \left[\frac{\partial f_a}{\partial z_n}\right]_{z=a} = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

由(3.2.2)及(3.2.4)可知,

$$|\beta_1|^2 + \cdots + |\beta_n|^2 = 1;$$

换言之, $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 不全为 0, 因此必須

$$\left[\det \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}\right]_{z=a} = \Delta(a) = 0.$$

矛盾,故証明了断言.

(ii) 命 Σ_0 为超球 $S(a, r_0)$ 的边界,并命

$$\Sigma_0^* = S\Sigma_0, \quad \Sigma_k^* = S_k\Sigma_0$$

$$a^* = Sa.$$

命 U 表超球 $S(a, r_0)$. 由(i)的証明知, a^* 是 SU 的內点, 故 a^* 至 Σ_0^* 的距离[1] δ 大于 0. 由假設, S_k 在 D 連續收斂, 而 Σ_0 为閉集,因之在 Σ_0 一致收斂(定理 1.7.5),此即对任一点 $\zeta \in \Sigma_0$, 可取 k 充分大使得

$$\sum_{\alpha=1}^{n} |f_a^{(k)}(\zeta) - f_a(\zeta)|^2 < \frac{\delta}{2};$$

换言之, Σ_k^* 上的点至 Σ_0^* 上的点的距离小于 $\frac{\delta}{2}$. 故以充分小的正数为半径而以 a^* 为心的超球 U^* 包含于 S_kU 之內. 定理証毕.

定理 3.2.2. 設 $S_1, S_2, \cdots$ 为一串在 D 連續收斂的解析变换, 每一变换皆是一一的,則其极限变换 S 或为蛻化的解析变换,即函数行列式恆等于零,或为在 D 也是一一的解析变换.

証. 由定理 1.6.4 知, S_k 的函数行列式 Δ_k 不取 0 值. 根据

1) 一点至一点集的距离,即此点至此点集任一点距离的低界.

定理 1.8.8，△或恆为 0（即 S 是蜕化的），或在 D 不取零值. 在后一情形，我們要証明 S 把域 D 中两不相同的点 $z^{(0)}$ 与 z 映为不同的点 $\overset{*}{z}{}^{(0)}$ 与 $\overset{*}{z}$.

不妨假設 $z^{(0)}=0$ 及 $\overset{*}{z}{}^{(0)}=0$，而要証明

$$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2>0 \tag{3.2.4}$$

之点 z 映为

$$|\overset{*}{z}_1|^2+\cdots+|\overset{*}{z}_n|^2>0 \tag{3.2.5}$$

之点 $\overset{*}{z}$ 便可.

因△在 $z=0$ 点不为零，故有一閉邻域 $\overline{U}$：

$$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\leqslant\rho^2,$$

使 S 在 $\overline{U}$ 是一一的. 因之如果 z 点在 $\overline{U}$ 中适合(3.2.4)，則对应的 $\overset{*}{z}$ 点显然适合(3.2.5). 現在只要証明 z 点不属于 $\overline{U}$ 的情形.

根据定理 3.2.1，可取 ρ 充分小，使得存在一 $\sigma>0$ 及一正整数 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时 $\overset{*}{z}=0$ 的閉邻域 $\overline{U}^*$：

$$|\overset{*}{z}_1|^2+\cdots+|\overset{*}{z}_n|^2\leqslant\sigma^2$$

包含在 $S_k\overline{U}$ 中.

根据假設，S_k 是一一的，故凡在

$$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2>\rho^2$$

的点 z 經 S_k 映为

$$|\overset{*}{z}{}_1^{(k)}|^2+\cdots+|\overset{*}{z}{}_n^{(k)}|^2>\sigma^2$$

的点 $\overset{*}{z}{}^{(k)}$，因之极限变换 S 把 z 点映为 $\overset{*}{z}$ 点，其坐标必須适合

$$|\overset{*}{z}_1|^2+\cdots+|\overset{*}{z}_n|^2=\lim_{k\to\infty}\{|\overset{*}{z}{}_1^{(k)}|^2+\cdots+|\overset{*}{z}{}_n^{(k)}|^2\}\geqslant\sigma^2>0.$$

定理証明.

定理 3.2.3. 如果解析变换 $S_1, S_2, \cdots$ 在 D 連續收斂，其极限变换 S 在域 D 是一一的，则对任一包含于 D 的紧致集 $\overline{H}$，对应有一自然数 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时，变换 S_k 在 $\overline{H}$ 是一一的.

証. 如果定理在一包含于 D 的閉集 $\overline{H}$ 中不成立，則存在一递增的自然数串 $k_1<k_2<\cdots$ 及 $\overline{H}$ 中的两个点串 $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots$ 与 $b^{(1)}, b^{(2)}, \cdots$，其中 $a^{(m)}\neq b^{(m)}$，使

$$S_{k_m}a^{(m)}=S_{k_m}b^{(m)},\quad m=1,2,\cdots.$$

不妨假定 $a^{(m)}$ 收斂于点 a，$b^{(m)}$ 收斂于点 b．由定理 3.2.1 知，点 a 与 b 不能重合．但由連續收斂的假設知，

$$Sa = Sb,$$

而 S 是一一的，故此不可能．証毕．

§ **3.3. 一域串的核．** 設 $D_1, D_2, \cdots$ 是空間 C^n 的一域串．命 A_k 表交集

$$D_k \cap D_{k+1} \cap \cdots$$

的内点組成的开集，显然 $A_k \subset A_{k+1}$．又命

$$A = A_1 + A_2 + \cdots.$$

若 $a \in A$，以 a 为基点的域串 $\{D_k\}$ 的核 D 定义为包含 a 点并且包含于 A 的最大連通开集．

由核 D 的定义可知，如果任一点 $b \in D$，必有 b 的在 D 中的邻域 $U(b)$ 及一正整数 k_0，使得 $U(b)$ 包含于所有 $D_k(k \geqslant k_0)$ 之内．因为 $b \in D \subset A$，必有一正整数 k_0，使得 $b \in A_{k_0}$．A_{k_0} 是开集，故有一在 D 中的邻域 $U(b) \subset A_{k_0}$．另一方面，$A_{k_0} \subset D_{k_0} \cap D_{k_0+1} \cap \cdots$，因此 $U(b) \subset D_k (k \geqslant k_0)$．

設函数串 $f^{(1)}(z)$，$f^{(2)}(z)$，$\cdots$ 分别在域 $D_1, D_2, \cdots$ 定义．我們說 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在核 D 連續收斂，即对 D 中的每一个邻域 $U(b)$，及相应的正整数 k_0，$U(b)$ 包含于所有 $D_{k_0}, D_{k_0+1}, \cdots$ 中者，函数串 $f^{(k_0)}(z)$，$f^{(k_0+1)}(z)$，$\cdots$ 在 $U(b)$ 連續收斂．此外，我們說 $\{f^{(k)}(z)\}$ 在 D 收斂，或在 D 局部一致有界等，也是这个意思．

定理 3.3.1. 設 $S_1, S_2, \cdots$ 为一串在有界域 D 連續收斂且一一的解析变换，其极限变换 S 也是一一的．命

$$D^* = SD, \quad D_k^* = S_k D.$$

若 a 为 D 的一内点，則 D^* 是域串 $\{D_k^*\}$ 的以 $a^* = Sa$ 为基点的核．

証．(i) 我們首先証明，若 H^* 为包含点 a^* 的域，当 $k \geqslant k_0$ 时，H^* 包含于所有 D_k^* 之内，則 H^* 包含于 D^* 內．

取 $k \geqslant k_0$．由于 H^* 包含于 D_k^*，則 S_k 的逆变换 $T_k = S_k^{-1}$ 把 H^* 一一地映为 D 的一子域．由于 D 是有界域，变换 $T_{k_0}, T_{k_0+1}, \cdots$ 在 H^* 一致有界，故成为一正規族，在其中可选取一子串 T_{k_1}, T_{k_2}，

…使之在 H^* 連續收斂为变換 T. 我們要証明 T 是一一的解析变換. 由定理 3.2.2 知,这只須証明在 H^* 中有一点使 T 的函数行列式不为零便可.

命

$$a_k^* = S_k a.$$

由假設知, a_k^* 收斂于 a^* 点,并且

$$a = T_{k_m} a_{k_m}^*.$$

令 $k_m \to \infty$, 則有

$$a = T a^*.$$

命

$$a_{k_m} = T_{k_m} a^*.$$

由此可見, a_{k_m} 收斂于 a 点.

根据定理 1.8.3 可知, S_{k_m} 的函数行列式 Δ_{k_m} 是局部一致有界的,因之存在一正数 N, 当 m 充分大时

$$|\Delta_{k_m}(a_{k_m})| \leqslant N.$$

命 $\Delta_{k_m}^*$ 表 T_{k_m} 的函数行列式,由

$$\Delta_{k_m}(a_{k_m})\Delta_{k_m}^*(a^*) = 1$$

可知, T 的函数行列式 Δ^* 在 a^* 点有

$$|\Delta^*(a^*)| = \left|\lim_{m\to\infty}\Delta_{k_m}^*(a^*)\right| \geqslant \frac{1}{N} > 0,$$

故 T 是一一的解析变换. 此外 T 映 H^* 入 D 中.

現在証明 H^* 包含于 D^* 之中. 設 b^* 是 H^* 的任一点, 我們只要証明, 存在一点 $b \in D$, 使 $b^* = Sb$ 便可.

命 $b = Tb^*$, 这是 D 中的点; 又命

$$b_m = T_{k_m} b^*, \tag{3.3.1}$$

这也是 D 中的点, 显然 b_m 收斂于 b. 由于 S_{k_m} 連續收斂, 因此

$$\lim_{m\to\infty} S_{k_m} b_m = Sb.$$

由(3.3.1)知

$$b^* = S_{k_m} b_m,$$

故有[1)]

1) 这結果包含了:在 H^* 中 $T = S^{-1}$.

$$b^* = Sb.$$

(ii) 現在証明 D^* 包含域串$\{D_k^*\}$而以 a^* 为基点的中核 G^*. 命交集 $D_k^* \cap D_{k+1}^* \cap \cdots$的内点組成的点集 A_k^* 之和集为

$$A^* = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^*.$$

我們作一串 G^* 的子域:

$$G_1^* \subset G_2^* \subset \cdots,$$

其中 G_1^* 包含 a^* 点,且每一 G_l^* 之閉包 $\overline{G}_l^*$ 是紧致的并包含于G^*. 此外 $G^* = \sum G_k^*$.

我們要証明,对任一 G_l^*, 我們可有一 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, G_l^* 包含于所有的 D_k^* 中.

任一点 $b^* \in \overline{G}_l^*$. 由假設知 $b^* \in G^* \subset A^*$,因此 b 必属于某一点集 A_k^*. A_k^* 是开集,因此有一 b^* 的邻域 $U(b^*) \subset A_k^*$. 所有这些邻域之和集 $\sum\limits_{b^* \in G_l^*} U(b^*)$ 蓋过 $\overline{G}_l^*$. 由于 $\overline{G}_l^*$ 是紧致的,根据 Heine-Borel 定理,存在有限个邻域蓋过它,設这些邻域为

$$U_1(b_1^*), \cdots, U_N(b_N^*),$$

它們分别包含在 $A_{k_1}^*, \cdots, A_{k_N}^*$ 中. 命

$$k_0 = \max\{k_1, \cdots, k_N\},$$

則当 $k \geqslant k_0$ 时, $\overline{G}_l^*$ 包含于所有 A_k^* 中, 特别 G_l^* 包含于所有 D_k^* 中.

根据 (i), G_l^* 包含于 D^* 中$(l = 1, 2, \cdots)$.

由于任一点 $b^* \in G^*$,必有一充分大的 l ,使得 $b^* \in G_l^*$. 因之 $b^* \in D^*$, 我們得出 $G^* \subset D^*$.

(iii) 最后証明 D^* 包含于$\{D_k^*\}$的以 a^* 为基点的核,此即要証 D^* 包含于点集 A^*.

任一点$b^* \in D^*$,有一点$b \in D$,使得 $b^* = Sb$. 根据定理 3.2.1, 在D与 D^* 分别有邻域 $U(b)$ 与 $U^*(b^*)$, 使得当 $k \geqslant k_0$ 时, $U^*(b^*)$ 包含于所有的 $S_k U(b)$ 之内,即 $U^*(b^*)$ 包含于所有 D_k^* 之内. 因此 $b^* \in A_k^*$, 亦即 $D^* \subset A^*$, 定理完全証明.

設給与一域串 $\{D_k\}$ 及一点 a，我們称 D_k 收斂于以 a 为基点的核，若任一$\{D_k\}$的子串皆有同一的以 a 为基点的核.

定理 3.3.2. 設

(i) $S_1, S_2, \cdots$为一串一一的解析变换，分别在域 $D_1, D_2, \cdots$ 中定义，并且 S_k 把 D_k 映为 D_k^*.

(ii) $D_1, D_2, \cdots$ 收斂于以 a 为基点的非空核 D，所有 D_k 包含于一有界域中，所有 D_k^* 亦包含在一有界域中.

(iii) $S_1, S_2, \cdots$ 在 a 点收斂，并且它們的映照函数的偏导数亦在此点收斂.

在上述假設下，$\{S_k\}$ 在D連續收斂为一非蜕化解析变换 S 的充要条件为$\{D_k^*\}$ 收斂于以 $a^* = \lim\limits_{k\to\infty} S_k a$为基点的非空核 D^*. 此外，如果上述的充分条件成立时，$D^* = SD$.

証. (i) 条件是必要的. 由于$\{S_k\}$的任一子串 $S_{k_1}, S_{k_2}, \cdots$ 在D連續收斂于一非蜕化的解析变换 S，則点集

$$D^* = SD$$

是包含 $a^* = Sa$ 点的域. 我們只要証明 D^* 是域串 $D_{k_1}^*, D_{k_2}^*, \cdots$ 的以 a^* 为基点的核便可.

我們先証 D^* 包含于 $\{D_{k_m}^*\}$ 的以 a^* 为基点的核中. 任一 $b^* \in D^*$，有一点 $b \in D$，使 $b^* = Sb$. 由假設(ii)知，有一 b 的包含于D的邻域 U，当 $m \geqslant m_0$ 时，U包含于所有 D_{k_m} 中. 应用定理 3.3.1 于域U可知，$S_{k_m}U$ 的以 b^* 为基点的核为 SU，此即 b^* 有一邻域 U^*包含于 D^* 者，当 $m \geqslant M_0 \geqslant m_0$ 时，U^*包含于所有$S_{k_m}U$ 中. 故 U^*包含于所有 $D_{k_m}^*$ 中$(m \geqslant M_0)$. 此乃表示b^* 点属于域串 $\{D_{k_m}^*\}_{m=1,2,\cdots}$ 的以 a^* 为基点的核. 但b^* 可以是 D^* 的任一点，故証明所断言.

其次要証 D^* 包含域串$\{D_{k_m}^*\}$的以 a^* 点为基点的核. 根据定理 3.3.1 証明(ii)的方法知，即要証任一域H^*包含 a^* 点，其閉包是紧致的且当m充分大时包含于所有 $D_{k_m}^*$ 中. 于是 H^* 包含于 D^*.

$S_{k_m}^{-1}H^*$ 包含于 D_{k_m}，而所有 D_{k_m} 包含于一有界域. 我們不妨假定 $S_{k_m}^{-1}$ 在 H^* 連續收斂为一解析变换 T，否則取其一子串使

之如此．命 $a^*_{k_m}=S_{k_m}a$，則 $a^*_{k_m}$ 收斂于 a^* 点，而 $a^*\in H^*$．故当 m 充分大时，所有 $a^*_{k_m}\in H^*$，并且 $a=Ta^*$．如定理 3.3.1 証明(i)一样，可証 T 是一一的．再应用定理 3.3.1 于域 H^*，可知域串 $\{S^{-1}_{k_m}H^*\}$ 的以 a 为基点的核即 TH^*．但每一 $S^{-1}_{k_m}H^*$ 包含于 D_{k_m}，故 TH^* 包含于$\{D_{k_m}\}$的以 a 为基点的核，此即 D．于是可如定理 3.3.1 証明(i)一样，可証 $T=S^{-1}$，故 H^* 包含于 D^*．

因此 D^* 是$\{D_{k_m}\}$的以 a^* 为基点的核．$\{D_{k_m}\}$ 是 $\{D_k\}$的任一子串，因之$\{D_k\}$收斂于以 a^* 为基点的核 D^*．

(ii) 条件是充分的．設 D^* 为$\{D^*_k\}$的以 a^* 为基点的非空核．命 $\Delta^*_k(a^*_k)$ 表 S^{-1}_k 在 a^*_k 点的函数行列式，$a^*_k=S_ka$．由于 $\{S^{-1}_k\}$ 是局部一致有界的，所以 $\Delta^*_k(z^*)$ 在 D^* 是局部一致有界的．由 $\Delta^*_k(a^*_k)\Delta_k(a)=1$ 可知，如果$\{S_k\}$之子串 $S_{k_1}, S_{k_2},\cdots$收斂，則必收斂为一非蜕化的解析变换 S，并且从証明 (i)知，S 映D 为 D^*．由假設(iii)及定理 3.1.2 知，S 是唯一的，因此根据定理 1.8.7 知，S_k 在D 收斂为 S．定理証明．

§ 3.4. **Carathéodory 度量．** 設D是空間 C^n 的一有界域．命 $\mathfrak{C}(D)$ 表所有在D解析的且其絕对值小于1的函数类，又命 $E(t_1, t_2)(|t_1|<1, |t_2|<1)$ 表复平面上单位圓內两点 t_1 与 t_2 的非欧距离，即

$$E(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\log\frac{1+\left|\dfrac{t_1-t_2}{1-\bar{t}_1t_2}\right|}{1-\left|\dfrac{t_1-t_2}{1-\bar{t}_1t_2}\right|}. \tag{3.4.1}$$

設 a 与 b 是D的任两点，Carathéodory 定义此两点間的距离函数为

$$D_D(a,b)=\sup_{\varphi\in\mathfrak{C}(D)}E(\varphi(a),\varphi(b)). \tag{3.4.2}$$

距离函数有如下的性质：

(i) 对任两点 $a,b\in D$，存在一在D解析的函数 $\varphi(z)\in\mathfrak{C}(D)$，使得

$$D_D(a,b)=E(\varphi(a),\varphi(b)),$$

并且这是一有限数值.

證. 在 $\mathfrak{E}(D)$ 中取一串函数 $\varphi^{(1)}(z), \varphi^{(2)}(z), \cdots$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} E(\varphi^{(k)}(a), \varphi^{(k)}(b)) = D_D(a, b).$$

命

$$f^{(k)}(z) = \frac{\varphi^{(k)}(z) - \varphi^{(k)}(b)}{1 - \varphi^{(k)}(z)\overline{\varphi^{(k)}(b)}},$$

则所有 $f^{(k)}(z)$ 之絕对値皆 <1, 故成一正規族. 我們可取一子串 $\{f^{(k_m)}(z)\}$, 收斂为一在 D 解析的函数 $f(z)$, 其絕对値 $\leqslant 1$ 且 $f(b)=0$. 由极大模原理知, 在 D 内必須 $|f(z)| < 1$. 在 $\{\varphi^{(k_m)}(z)\}$ 中取一子串收斂于 $\varphi(z)$, 则

$$\varphi(z) = \frac{f(z) + \varphi(b)}{1 + \overline{\varphi(b)}f(z)}$$

为所求的函数(显然属于 $\mathfrak{E}(D)$).

由証明中知道, $D_D(a, b)$ 可定义为

$$D_D(a, b) = \sup_{f\in\mathfrak{E}(D), f(b)=0} \frac{1}{2}\log\frac{1+f(a)}{1-f(a)}.$$

(ii) $D_D(a, b)$ 是一度量, 即

1° $D_D(a, b) = D_D(b, a)$;

2° $D_D(a, b) \geqslant 0$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立;

3° $D_D(a, b) \leqslant D_D(a, c) + D_D(c, b)$.

証. 1° 是显然的. 欲証 2°, 只要証若两不同的点 $a, b\in D$, 则 $D_D(a, b) > 0$. 設 $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n)$, 不妨假定 $a_1 \neq b_1$. 由于 D 是一有界域, 故有一正数 M 使得 $\frac{z_1}{M}$ 之絕对値在 D 上小于 1. 由于 $E\left(\frac{a_1}{M}, \frac{b_1}{M}\right) > 0$, 故 $D_D(a, b) > 0$.

現在証明 3°. 从(i)可知, 存在 $\varphi(z) \in \mathfrak{E}(D)$, 使得

$$E(\varphi(a), \varphi(b)) = D_D(a, b).$$

熟知

$$E(\varphi(a), \varphi(b)) \leqslant E(\varphi(a), \varphi(c)) + E(\varphi(c), \varphi(b)),$$

此乃表示

$$D_D(a, b) \leqslant D_D(a, c) + D_D(c, b).$$

(iii) 若有一解析变换 S 把域 D 一一地映为另一有界域 D^*，且 $a^* = Sa$，$b^* = Sb$，則

$$D_D(a, b) = D_{D^*}(a^*, b^*).$$

这是显然的，讀者試証之.

(iv) 若 $P = \{|z_1 - z_1^{(0)}| < r_1, \cdots, |z_n - z_n^{(0)}| < r_n\}$，則对 P 的任两点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 与 $b = (b_1, \cdots, b_n)$，有

$$D_P(a, b) = \max\left\{E\left(\frac{a_1 - z_1^{(0)}}{r_1}, \frac{b_1 - z_1^{(0)}}{r_1}\right), \cdots,\right.$$

$$\left.E\left(\frac{a_n - z_n^{(0)}}{r_n}, \frac{b_n - z_n^{(0)}}{r_n}\right)\right\}.$$

証. 根据(iii)，我們不妨假定 $z^{(0)} = 0$ 及 $r_1 = \cdots = r_n = 1$. 如果 $a = b$，命题是显然的；如果 $a \neq b$，我們作一解析变换

$$w_1 = \frac{z_1 - a_1}{1 - \bar{a}_1 z_1}, \cdots, w_n = \frac{z_n - a_n}{1 - \bar{a}_n z_n},$$

这是把 P 一一地映为自己而把点 a 映为原点的变换. 若命

$$c_1 = \frac{b_1 - a_1}{1 - \bar{a}_1 b_1}, \cdots, c_n = \frac{b_n - a_n}{1 - \bar{a}_n b_n},$$

則应用(iii)知，$D_P(a, b) = D_P(0, c)$.

不妨假設 $|c_1|, \cdots, |c_n|$ 中最大者为 $|c_n|$. 对任一 $\varphi(z) \in \mathfrak{E}(P)$，并且 $\varphi(0) = 0$ 者，我們作函数

$$f(t) = \varphi\left(\frac{c_1 t}{c_n}, \frac{c_2 t}{c_n}, \cdots, t\right).$$

这是在单位圓 $|t| < 1$ 解析并且絕对值小于 1 的函数，此外 $f(0) = 0$. 由单复变数的 Schwarz 引理知，

$$|f(c_n)| = |\varphi(c_1, \cdots, c_n)| \leqslant |c_n|. \tag{3.4.3}$$

在(i)的証明中知道，0 与 c 点間的距离函数可定义为

$$D_P(0, c) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathfrak{E}(P) \\ \varphi(0) = 0}} \frac{1}{2} \log \frac{1 + |\varphi(c)|}{1 - |\varphi(c)|}.$$

由(3.4.3)知

$$D_P(0, c) \leqslant \frac{1}{2} \log \frac{1 + |c_n|}{1 - |c_n|};$$

另一方面，如果 $\varphi(z) \equiv z_n$，則 $\varphi(z) \in \mathfrak{C}(P)$，$\varphi(0) = 0$. 故

$$D_P(0, c) \geqslant \frac{1}{2} \log \frac{1 + |c_n|}{1 - |c_n|}.$$

所以我們有

$$D_P(0, c) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |c_n|}{1 - |c_n|} = \max\{E(0, c_1), \cdots, E(0, c_n)\}.$$

(v) 如果 G 为有界域 D 的子域，則对任两点 $a, b \in G$，有

$$D_D(a, b) \leqslant D_G(a, b).$$

(vi) $D_D(a, b)$ 是 a 与 b 的連續函数，并且当 b 趋于 a 时趋于零.

証. 取一多圓柱 $P(a, r)$ 包含于 D. 任与 $\varepsilon > 0$，由 (iv) 知对充分接近 a 的点 b，有

$$D_P(a, b) < \varepsilon.$$

而由(v)知

$$D_D(a, b) \leqslant D_P(a, b),$$

故 $b \to a$ 时，$D_D(a, b) \to 0$.

又由(ii) 3° 知

$$|D_D(a, c) - D_D(b, c)| \leqslant D_D(a, b) < \varepsilon.$$

同理，当 d 充分接近 c，有

$$|D_D(d, b) - D_D(c, b)| \leqslant D_D(d, c) < \varepsilon,$$

故有

$$|D_D(d, b) - D_D(c, a)| \leqslant |D_D(d, b) - D_D(c, b)| + |D_D(c, b) - D_D(c, a)| < 2\varepsilon.$$

証毕.

定理 3.4.1. 若 S 是一解析变换，把有界域 D 映入有界域 D^* 内，把域 D 的 a 与 b 点分别映为 $a^* = Sa$ 与 $b^* = Sb$，則

$$D_{D^*}(a^*, b^*) \leqslant D_D(a, b).$$

証. 根据(i)，我們有一 $\varphi^*(z^*) \in \mathfrak{C}(D^*)$ 使得

$$E(\varphi^*(a^*), \varphi^*(b^*)) = D_{D^*}(a^*, b^*).$$

設变换 S 的映照函数为

$$z_a^* = f_a(z), \quad \alpha = 1, \cdots, n,$$

則函数

$$\varphi(z) = \varphi^*(f_1(z), \cdots, f_n(z))$$

属于 $\mathfrak{C}(D)$. 由于

$$E(\varphi(a), \varphi(b)) \leqslant D_D(a, b),$$

故得出

$$D_{D^*}(a^*, b^*) \leqslant D_D(a, b).$$

定理証明.

現在我們定义域 D 中联結 a, b 两点的有长曲綫 σ 对于 Carathéodory 度量的长度 $L_D(\sigma)$. 先設 D 是一多圓柱 $P(a, r)$. 对 σ 上的任一組分割点 $a^{(0)} = a$, $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(N)} = b$, 根据(iv)可知

$$\sum_{k=1}^{N} D_P(a^{(k-1)}, a^{(k)}) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{n} E\left(a_\alpha^{(k-1)}, a_\alpha^{(k)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\sigma_\alpha} \frac{|dz_\alpha|}{1 - |z_\alpha|^2},$$

其中 σ_α 是 σ 在 z_α 平面的投影[1]. 故上式左端有一有限的高界, 此高界定义为 $L_P(\sigma)$.

对一般的有界域 D, 我們可用有限多个包含于 D 的多圓柱 $P_1, \cdots, P_l$ 盖过曲綫 σ, 使得两相邻多圓柱的中心落在同一多圓柱內. 我們考虑 σ 的分割点 $a = a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(N)} = b$, 使得任取相邻分割点間的曲綫必落在一多圓柱之中者. 如是根据(iv)可知

$$\sum_{k=1}^{N} D_D(a^{(k-1)}, a^{(k)}) \leqslant L_{P_1}(\sigma_1) + \cdots + L_{P_l}(\sigma_l),$$

其中 $\sigma_1, \cdots, \sigma_l$ 是 σ 的用多圓柱 $P_1, \cdots, P_l$ 的中心分割的綫段. 故上式左端有一有限高界, 这定义之为 $L_D(\sigma)$.

---

1) 如果曲綫 σ 的方程为 $z_1 = z_1(t), \cdots, z_n = z_n(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 則 σ_α 即是 z_α 平面的曲綫 $z_\alpha = z_\alpha(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

从定理 3.4.1 立得

定理 3.4.2. 若解析变换 S 映有界域 D 入 D^*，把 D 内的有长曲綫 σ 映为 σ^*，则

$$L_{D^*}(\sigma^*) \leqslant L_D(\sigma).$$

設 a 为 D 的一固定点. 命 $D(a, \rho)$ 表 D 的子集，其每一点皆能以一在 D 中的有长曲綫 σ 与 a 点相联，并且

$$L_D(\sigma) < \rho$$

者(ρ 是一正数). 显然 $D(a, \rho)$是連通的，并且可以証明它是一域. 我們只要証明它是开集便可. 設 $b \in D(a, \rho)$，則能作一曲綫 σ_0 与 a 相联，且 $L_D(\sigma_0) = \rho_1 < \rho$. 作包含于 D 的多圓柱 $P(b, r)$，又作 $P(b, \delta)$ 包含于 $P(b, r)$. 对任一点 $z \in P(b, \delta)$，能以一曲綫 σ 与 b 点相联如下：σ_1 是 z_1 平面的圓 $|z_1 - b_1| < r_1$ 內联結点 $b^{(1)} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 与 $b^{(2)} = (z_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的非欧直綫，$\cdots$，σ_n 是 z_n 平面的圓 $|z_n - b_n| < r_n$ 內联結点 $b^{(n)} = (z_1, \cdots, z_{n-1}, b_n)$ 与 $b^{(n+1)} = z = (z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n)$ 的非欧直綫. 而命 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n$，如是

$$L_{P(b, r)}(\sigma) = D_{P(b, r)}(b^{(1)}, b^{(2)}) + \cdots + D_{P(b, r)}(b^{(n)}, b^{(n+1)}).$$

取 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_n)$中的正数 δ_α 充分小，可得

$$L_{P(b,r)}(\sigma) < \rho - \rho_1.$$

由(v)知

$$L_D(\sigma) < \rho - \rho_1.$$

此乃表示所有 $P(b; \delta)$ 的点皆包含于 $D(a, \rho)$，故这是一开集.

反之，如果 U 是 D 中的点 a 的邻域，则必有一充分小之正数ρ，使得 $D(a, \rho) \subset U$. 实际上，D 是有界的，可包含于一多圓柱

$$P(a, R) = \{|z_1 - a_1| < R, \cdots, |z_n - a_n| < R\}$$

中. 我們取 $P(a, \delta) \subset U$，取 ρ 充分小，使得对任一点 $b \notin P(a, \delta)$ 必有

$$D_D(a, b) \geqslant D_{P(a, R)}(a, b) =$$
$$= \max\left\{E\left(0, \frac{b_1 - a_1}{R}\right), \cdots, E\left(0, \frac{b_n - a_n}{R}\right)\right\} > \rho.$$

此乃表示 b 点不在 $D(a, \rho)$，因为任一联 a 与 b 之有长曲綫 σ 必适合 $L_D(\sigma) \geqslant D_D(a, b) > \rho$. 故 $D(a, \rho)$ 包含在 $P(a, \delta)$中. 从定理 3.4.2 可得

定理 3.4.3. 若解析变换 S 映有界域 D 入 D^*，把 $a \in D$ 映为点 a^*，則域 $D(a, \rho)$ 之象 $D^*_\rho = SD(a, \rho)$ 包含于 $D^*(a^*, \rho)$ 中.

§ 3.5. 內部解析映照. 把一域 D 映入其內部的解析变换称为域 D 的內部解析映照.

定理 3.5.1. 如果 $S_1, S_2, \cdots$ 为一串在有界域 D 收斂的內部解析映照，把域 D 一一地映为自己者，則其极限变换 S 或者是一一的解析变换把域 D 映为自己者. 或者是一蛻化的解析变换把 D 的点皆映为其边界点.

証. 設 a 为 D 的任一点，$a^{(k)} = S_k a$，并且 $a^{(k)}$ 收斂于点 a^*. D 是一有界域，$\{S_k\}$ 成一正規族，故 $\{S_k\}$ 在 D 連續收斂. 根据定理 3.2.2，有两种可能的情形. 其一是 S 为一一的解析变换，則 a^* 是 D 的內点. 視 $D, D, \cdots$ 为定理 3.3.2 的域串 $D_1^*, D_2^*, \cdots$，則根据此定理知，$\{D_k^*\}$ 收斂于以 a^* 为基点的核，即域 D，并且 $D = SD$.

另一情形是 S 为蛻化的解析变换，則 a^* 不能为 D 的內点，否則 $D_k^* = S_k D$ 以 a^* 为基点的核是非空的，則 S 不是蛻化的解析变换，矛盾. 定理証明.

定理 3.5.2. 設 S 是一一的解析变换，把有界域 D 映为自己. 若 $S, S^2, S^3, \cdots$ 的收斂子串非全部蛻化，則可从 $\{S^k\}$ 中选出一子串收斂于么变换，即恒同变换，亦即把 D 任一点变为自己的变换.

証. 根据假設，$\{S^k\}$ 有一子串 $S^{k_1}, S^{k_2}, \cdots (k_1 < k_2 < \cdots)$ 在 D 收斂为一非蛻化的解析变换 T. 命 $p_m = k_{m+1} - k_m$，这是正整数，在变换串 $\{S^{p_m}\}_{m=1,2,\cdots}$ 中，我們可选取一子串 $\{S^{p_{m_j}}\}_{j=1,2,\cdots}$，在域 D 連續收斂为一解析变换 E.

T 是非蛻化的，故必把 D 一一地映为自己. 对任一点 $a \in D$，必有一点 $b \in D$，使得 $a = Tb$. 命 $a^{(k_m)} = S^{k_m} b$，則 $a^{(k_m)}$ 收斂为 a. 我們有

$$S^{p_{mj}}a^{(k_{mj})} = S^{k_{mj+1}}S^{-k_{mj}}a^{(k_{mj})}$$
$$= S^{k_{mj+1}}b = a^{(k_{mj+1})}.$$

由于$\{a^{(k_{mj})}\}$与$\{a^{(k_{mj+1})}\}$皆是$\{a^{k_m}\}$的子串，故当 $j\to\infty$ 时皆收斂为点 a，所以

$$Ea = \lim_{j\to\infty} S^{p_{mj}}a^{(k_{mj})} = \lim_{j\to\infty} a^{(k_{mj+1})} = a.$$

a 可以是 D 的任一点，因此 E 是恆同变换. 定理証明.

定理 3.5.3. 如果 S 为一解析变换，把有界域 D 映入 D 内，且把域 D 的点 a 固定不变，則 S 在 a 点的函数行列式的絕对值 $\leqslant 1$. 在 a 点的函数行列式的絕对值等于 1 的充要条件为 S 把 D 一一地映为自己.

証. (i) 命 α 为变换 S 在点 a 的函数行列式之絕对值. 因S, S^2, $\cdots$ 为一致有界，故有一正数 N 使得

$$\alpha^k < N \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

这首先必須

$$\alpha \leqslant 1.$$

如果 S 是一一变换，則同法可証

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant 1.$$

故 $\alpha = 1$.

(ii) 現在要証明：若 S 是一一的且 $\alpha=1$，則 S 把 D 映为自己.

由假設知，$D_1 = SD \subset D$. 若命 $D_k = S^k D$，則有

$$D_1 \supset D_2 \supset \cdots. \tag{3.5.1}$$

从 $S, S^2, \cdots$ 中选取一子串 $S^{k_1}, S^{k_2}, \cdots$ 收斂为一变换 T. 由于 $\alpha^k = 1$，T 是一一的解析变换（定理 3.2.2），把 D 映为一域 $D_0 = TD \subset D$ 是域串

$$D_{k_1}, D_{k_2}, \cdots$$

的以 a 为基点的非空核（定理 3.3.2）.

由于变换串

$$S^{k_1+1}, S^{k_2+1}, \cdots$$

在D收敛为TS,而根据(3.5.1),易証域串

$$D_{k_1+1},\ D_{k_2+1},\ \cdots$$

的以a为基点的核亦为D_0. 故由定理 3.3.2 知

$$TSD = D_0.$$

由此得

$$TSD = TD.$$

由于T是一一的变换,故

$$SD = D.$$

(iii) 最后証明:若 $\alpha = 1$, 則S是一一的.

在a点有一邻域U使得S是一一的. 命 $D(a, \rho)$ 表D中的点能与a点以有长曲綫σ相联而 $L_D(\sigma) < \rho$ 者所成的点集. 取ρ充分小,使得

$$D(a, \rho) \subset U.$$

命 $D_\rho = SD(a, \rho)$, 由定理 3.4.3 知

$$D_\rho \subset D(a, \rho).$$

由于S在 $D(a, \rho)$ 是一一的,应用(ii)的結果知

$$D_\rho = D(a, \rho).$$

点a在变换S下不变,应用定理 3.5.1 及 3.5.2 于域 $D(a, \rho)$, 可从 $S, S^2, S^3, \cdots$ 中选出一子串S^{k_m}在 $D(a, \rho)$ 收斂于么变换E. 根据定理 1.8.6 及 1.2.2 可知,此子串在D亦收斂于么变换E.

如果a与b为域D的两点,使得

$$Sa = Sb,$$

則

$$S^{k_m}a = S^{k_m}b.$$

取$m \to \infty$,有

$$a = b,$$

故S是一一的. 定理完全証明.

定理 3.5.4. 設 $\mathfrak{G}$ 为一域,其閉包 $\bar{\mathfrak{G}}$ 包含于有界域D中者, a_0为D的一点, S是映D入其內部并把a_0点固定不变的任一变換,則

(i) 存在一正数 $\omega_1 < 1$，当解析变换 S 在 a_0 点的函数行列式的絕对值 $|\Delta(a_0)| > \omega_1$ 时，变换 $S: \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}^*$ 是一一的；

(ii) 存在一正数 $\omega_2 < 1$，当 $|\Delta(a_0)| > \omega_2$ 时，$\mathfrak{G}$ 为域 D 中某一子域的 S 之一一映象.

証. (i) 如果定理中(i)的結論非眞，則有一趋于 1 的单調递增正数串 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$，对任一 α_k 必有一解析变换 S_k 映 D 入其內部并把 a_0 点固定不变，且其函数行列式适合

$$|\Delta_k(a_0)| > \alpha_k,$$

但 S_k 在 $\mathfrak{G}$ 非一一的. 根据定理 3.5.3 可知，

$$\lim_{k\to\infty} |\Delta_k(a_0)| = 1,$$

并且我們可取 $\{S_k\}$ 的子串 $S_{k_1}, S_{k_2}, \cdots$ 在 D 收斂. 其极限变換 S 必把 D 一一地映为自己，因为 S 在 a_0 的充分小邻域 $D(a_0, \rho)$ 是一一的，由定理 3.4.3，$S_kD(a_0, \rho) \subset D(a_0, \rho)$. 又由定理 3.2.1，有一邻域 $U(a) \subset D(a_0, \rho)$，使得 $k \geqslant k_0$ 时 S_kU 包含 $a^* = Sa$ 的一邻域 $U^*(a^*)$. 但

$$S_kU \subset S_kD(a_0, \rho) \subset D(a_0, \rho),$$

故 $U^*(a^*) \subset D(a_0, \rho)$，卽 a^* 是 D_0 的內点. 所以 S 把 $D(a_0, \rho)$ 映为 $D(a_0, \rho)$ (定理 3.5.3). 我們在 $D(a_0, \rho)$ 选一 $\{S^k\}$ 的子串 S^{l_m}，在 D 它收斂为么变换 E. 如果 S 非一一，則有 D 的不同的点 a 与 b 使 $Sa = Sb$. 由此知

$$S^{l_m}a = S^{l_m}b.$$

命 $m \to \infty$ 得 $a = b$. 矛盾. 故 S 是把 D 映入 D 的一一变換，根据定理 3.5.3，S 把 D 映为自己.

由定理 3.2.3 知，存在一正整数 m_0，使得 $m \geqslant m_0$ 时，S_{k_m} 在 $\mathfrak{G}$ 是一一的. 矛盾.

(ii) 同样，如果定理中(ii)的結論不能成立，我們有一串把点 a_0 固定不变的解析变換 $S_1, S_2, \cdots$ 在 D 收斂为 S. S 把 D 一一地映为自己，而任一 S_k 皆不能把 D 的一子域一一地映为 $\mathfrak{G}$.

命

$$\bar{K} = S^{-1}\mathfrak{G}.$$

取一包含 $\bar{K}$ 的开集 U,其閉包 $\bar{U}$ 包含于 D 者. 显然 SU 包含 $\mathfrak{G}$.

由定理 3.2.3 知，存在一正整数 k_0，当 $k \geqslant k_0$ 时，S_k 在 U 是一一的.

对任一点 $a^* \in \mathfrak{G}$，必有一点 $a \in U$，使得 $a^* = Sa$. 根据定理 3.2.1 知，有一 a^* 的邻域 $U^*(a^*)$，当 $k \geqslant N_{a^*}$ ($\geqslant k_0$)时，$U^*(a^*)$ 包含于所有 S_kU 之內. 所有这些邻域 $U^*(a^*)$，$a^* \in \mathfrak{G}$,盖过 $\mathfrak{G}$，而根据 Heine-Borel 定理,我們可以选出有限个如此的邻域 $U^*(a_1^*)$，$U^*(a_2^*)$，$\cdots$，$U^*(a_l^*)$ 把 $\mathfrak{G}$ 盖过.

命

$$N_0 = \max\{N_{a_1^*}, \cdots, N_{a_l^*}\},$$

則当 $k \geqslant N_0$ 时,所有 S_kU 包含 $\mathfrak{G}$. 这与选择 S_k 时的假定矛盾.

§ 3.6. Schwarz 引理. 定理 3.4.1 在某种意义上是单复变数函数論的 Schwarz-Pick 定理的推广. 但沒有从 Carathéodory 度量形式的 Schwarz-Pick 定理推得对映照函数的偏导数的估計，并且不能如单复变数函数論一样，从定理 3.4.1 中的等式成立推出变换 S 是一一的把 D 映为自己. 有人便考慮应用其他度量来推广 Schwarz 引理. 由于对任一有界域，Bergmann 度量皆存在,这自然地考慮到应用 Bergmann 度量.

首先要注意的是单复变数几何函数論中所証明的不等式关系,在多个复变数函数論中往往要改变为两方陣的定正、半定正关系,这是因为多复变数解析变换的映照函数是一組函数,而此等函数的偏导数成一方陣. 故方陣的引进也是自然的事.

为簡便起見,我們以 Hermitian 方陣 $H > O$ 或 $H \geqslant O$ 分別表 H 是定正的或半定正的；$n \times n$ Hermitian 方陣 $A < B$ 与 $A \leqslant B$ 分別表 $B - A$ 是定正的或半定正的.

若 $a_{j\beta}(z)$ $(j = 1, \cdots, m;\ \beta = 1, \cdots, n)$ 是一組在域 D 可积的函数,矩陣

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的积分$\int_D A\dot{z}$表示对矩陣A的每一元素积分后所成的矩陣，即

$$\int_D A\dot{z} = \begin{pmatrix} \int_D a_{11}\dot{z} \cdots \int_D a_{1n}\dot{z} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_D a_{m1}\dot{z} \cdots \int_D a_{mn}\dot{z} \end{pmatrix}. \tag{3.6.1}$$

我們首先証明一个引理：

定理 3.6.1. (Schwarz 不等式的推广). 設 $\lambda(z) = (\lambda_1(z), \cdots, \lambda_n(z))$ 与 $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z))$ 是两个 n 維向量，它們的支量 $\lambda_\alpha(z)$ 与 $\varphi_\alpha(z)$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$ 皆是在域D定义的絕对值平方可积的函数，則恆有

$$\int_D \bar{\lambda}'\varphi\dot{z}\overline{\left(\int_D \bar{\lambda}'\varphi\dot{z}\right)}' \leqslant \int_D \varphi\bar{\varphi}'\dot{z}\int_D \bar{\lambda}'\lambda\dot{z}.$$

証. 設 $u = (u_1, \cdots, u_n)$是一常数向量，則有

$$u\int_D \bar{\lambda}'\varphi\dot{z}\overline{\left(\int_D \bar{\lambda}'\varphi\dot{z}\right)}'\bar{u}' = \int_D (u\bar{\lambda}')\varphi\dot{z}\int_D \bar{\varphi}'(\lambda\bar{u}')\dot{z} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\left|\int_D (u\bar{\lambda}')\varphi_\alpha\dot{z}\right|^2 \leqslant \sum_{\alpha=1}^{n}\int_D |\varphi_\alpha|^2\dot{z}\int_D |u\bar{\lambda}'|^2\dot{z} =$$

$$= \int_D \varphi\bar{\varphi}'\dot{z}\int_D u\bar{\lambda}'\lambda\bar{u}'\dot{z} = u\left(\int_D \varphi\bar{\varphi}'\dot{z}\int_D \bar{\lambda}'\lambda\dot{z}\right)\bar{u}'.$$

故定理成立.

定理 3.6.2. 設 $f(z) = (f_1(z), \cdots, f_n(z))$ 是在域D定义的一組函数，其中每一 $f_\alpha(z)$ 皆是解析函数，并且 $|f_1(z)|^2 + \cdots + |f_n(z)|^2 \leqslant M^2$, M是一正常数，則恆有

$$\frac{\partial f}{\partial z}\overline{\frac{\partial f'}{\partial z}} \leqslant M^2 T_D(z, \bar{z}),$$

其中 $T_D(z, \bar{z})$ 是域D的度量方陣(見 § 2.5)而 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 为函数方陣[見(2.5.5)].

証. 命

$$\varphi_\alpha(z) = f_\alpha(z)K(z, \bar{t}), \quad \alpha = 1, \cdots, n \tag{3.6.2}$$

其中 $K(z, \bar{t})$ 是域D的核函数，$t=(t_1, \cdots, t_n)$ 是域D的一固定点. 由于 $f_a(z)$ 是有界的，$\varphi_a(z)$ 对变数 z 是在域D絕对值平方可积的函数.

作函数

$$\lambda_a(z) = K(z, \bar{t}) \frac{\partial K(t, \bar{t})}{\partial \bar{t}_a} - K(t, \bar{t}) \frac{\partial K(z, \bar{t})}{\partial \bar{t}_a},$$
$$\alpha = 1, \cdots, n. \tag{3.6.3}$$

每一 $\lambda_a(z)$ 对变数 z 也是在域D絕对值平方可积的函数.

由定理 2.3.2 知

$$\int_D \overline{\lambda_a(z)} \varphi_\beta(z) \dot{z} =$$
$$= \frac{\partial K(t, \bar{t})}{\partial t_a} \int_D \varphi_\beta(z) K(t, \bar{z}) \dot{z} - K(t, \bar{t}) \int_D \varphi_\beta(z) \frac{\partial K(t, \bar{z})}{\partial t_a} \dot{z} =$$
$$= \varphi_\beta(t) \frac{\partial K(t, \bar{t})}{\partial t_a} - K(t, \bar{t}) \frac{\partial \varphi_\beta(t)}{\partial t_a} =$$
$$= -K^2(t, \bar{t}) \frac{\partial}{\partial t_a} \left[\frac{\varphi_\beta(t)}{K(t, \bar{t})} \right] =$$
$$= -K^2(t, \bar{t}) \frac{\partial f_\beta(t)}{\partial t_a}, \quad \alpha, \beta = 1, \cdots, n.$$

由此知

$$\int_D \bar{\lambda}' \varphi \dot{z} = \begin{pmatrix} \int_D \bar{\lambda}_1 \varphi_1 \dot{z} \cdots \int_D \bar{\lambda}_1 \varphi_n \dot{z} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_D \bar{\lambda}_n \varphi_1 \dot{z} \cdots \int_D \bar{\lambda}_n \varphi_n \dot{z} \end{pmatrix} =$$
$$= -K^2(t, \bar{t}) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial z_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} =$$
$$= -K^2(t, \bar{t}) \frac{\partial f(t)}{\partial t}. \tag{3.6.4}$$

同样，由

$$\int_D \overline{\lambda_\alpha(z)}\lambda_\beta(z)\dot{z} = \frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha}\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial \bar{t}_\beta}\int_D K(z,\bar{t})K(t,\bar{z})\dot{z} -$$

$$- K(t,\bar{t})\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial \bar{t}_\beta}\int_D K(z,\bar{t})\frac{\partial K(t,\bar{z})}{\partial t_\alpha}\dot{z} -$$

$$- K(t,\bar{t})\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha}\int_D \frac{\partial K(z,\bar{t})}{\partial \bar{t}_\beta}K(t,\bar{z})\dot{z} +$$

$$+ K(t,\bar{t})^2\int_D \frac{\partial K(z,\bar{t})}{\partial \bar{t}_\beta}\frac{\partial K(t,\bar{z})}{\partial t_\alpha}\dot{z} =$$

$$= \frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha}\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial \bar{t}_\beta}K(t,\bar{t}) - K(t,\bar{t})\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial \bar{t}_\beta}\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha} -$$

$$- K(t,\bar{t})\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha}\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial \bar{t}_\beta} + K^2(t,\bar{t})\frac{\partial^2 K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha \partial \bar{t}_\beta} =$$

$$= K(t,\bar{t})\left[K(t,\bar{t})\frac{\partial^2 K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha \partial \bar{t}_\beta} - \frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha}\frac{\partial K(t,\bar{t})}{\partial \bar{t}_\beta}\right] =$$

$$= K^3(t,\bar{t})\frac{\partial^2 \log K(t,\bar{t})}{\partial t_\alpha \partial \bar{t}_\beta} =$$

$$= K^3(t,\bar{t})T_{\alpha\bar{\beta}}(t,\bar{t}), \quad \alpha,\beta = 1,\cdots,n$$

可知

$$\int_D \bar{\lambda}'\lambda\dot{z} = \begin{pmatrix} \int_D \bar{\lambda}_1\lambda_1\dot{z} \cdots \int_D \bar{\lambda}_1\lambda_n\dot{z} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_D \bar{\lambda}_n\lambda_1\dot{z} \cdots \int_D \bar{\lambda}_n\lambda_n\dot{z} \end{pmatrix} =$$

$$= K^3(t,\bar{t})\begin{pmatrix} T_{1\bar{1}}(t,\bar{t}) \cdots T_{1\bar{n}}(t,\bar{t}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_{n\bar{1}}(t,\bar{t}) \cdots T_{n\bar{n}}(t,\bar{t}) \end{pmatrix} =$$

$$= K^3(t,\bar{t})T(t,\bar{t}). \tag{3.6.5}$$

根据(3.6.4)，(3.6.5)及定理 3.6.1 可得

$$K^4(t,\bar{t})\frac{\partial f(t)}{\partial t}\frac{\overline{\partial f(t)}'}{\partial t} \leqslant K^3(t,\bar{t})T(t,\bar{t})\int_D \varphi\bar{\varphi}'\dot{z},$$

此即

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t}\frac{\overline{\partial f(t)}'}{\partial t}\leqslant\frac{1}{K(t,\bar{t})}T(t,\bar{t})\int_D\varphi\bar{\varphi}'\dot{z}. \qquad (3.6.6)$$

由 (3.6.2) 知

$$\begin{aligned}\varphi\bar{\varphi}'&=|\varphi_1(z)|^2+\cdots+|\varphi_n(z)|^2=\\&=(|f_1(z)|^2+\cdots+|f_n(z)|^2)|K(\bar{z},t)|^2\leqslant\\&\leqslant M^2|K(z,\bar{t})|^2.\end{aligned}$$

故(3.6.6)变为

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t}\frac{\overline{\partial f(t)}'}{\partial t}\leqslant\frac{M^2}{K(t,\bar{t})}\left(\int_D|K(z,\bar{t})|^2\dot{z}\right)T(t,\bar{t})=$$

$$=\frac{M^2}{K(t,\bar{t})}K(t,\bar{t})T(t,\bar{t})=M^2T(t,\bar{t}).$$

定理証明.

定理 3.6.3. 設解析变换 S 把有界域 D 映为自己,并且点 $a\in D$ 不变，則映照函数的函数方陣在 a 点的特征根之絕对值皆 $\leqslant 1$. 所有特征根之絕对値皆等于 1 的充要条件为变换 S 把域 D 一一地映为自己.

証. 不妨假定 a 为原点. 由于 D 是有界域,存在一正数 M, 使得 S 的映照函数 $f(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$适合 $|f_1(z)|^2+\cdots+|f_n(z)|^2\leqslant M^2$. 由定理 3.6.2 知

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0}\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}'_{z=0}\leqslant M^2T(0,0).$$

由于 $T(0,0)$ 是一定正的常数的 Hermitian 方陣，故存在一正数 μ 使得

$$T(0,0)\leqslant\mu I.$$

如是有

$$A\bar{A}'\leqslant\mu M^2I,$$

其中

$$A=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0}.$$

S^k 也是把 D 映入其內部且令原点不变的变换,因之有

$$A^k\overline{A^k}' \leqslant \mu M^2 I. \tag{3.6.7}$$

习知存在酉方阵 U 使得

$$A = U\Gamma\overline{U}', \tag{3.6.8}$$

其中 Γ 是一三角方阵，設其为

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mu_1 & * \cdots * \\ 0 & \mu_2 \cdots * \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 \cdots \mu_n \end{pmatrix},$$

这里 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 是 A 的特征根.

以(3.6.8)代入(3.6.7)得

$$U\Gamma^k\overline{\Gamma^k}'\overline{U}' \leqslant \mu M^2 I$$

或

$$\Gamma^k\overline{\Gamma^k}' \leqslant \mu M^2 I. \tag{3.6.9}$$

从

$$\Gamma^k = \begin{pmatrix} \mu_1^k & * \cdots * \\ 0 & \mu_2^k \cdots * \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 \cdots \mu_n^k \end{pmatrix}$$

得知

$$\Gamma^k\overline{\Gamma^k}' = \begin{pmatrix} |\mu_1|^{2k}+\text{非負实数} & * & \cdots\cdots * \\ * & |\mu_2|^{2k}+\text{非負实数} & \cdots * \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ * & * & \cdots |\mu_n|^{2k} \end{pmatrix}.$$

由(3.6.9)知必須

$$|\mu_1|^{2k} \leqslant \mu M^2, \cdots, |\mu_n|^{2k} \leqslant \mu M^2,$$

k 可以是任意的正整数，因此必須

$$|\mu_1| \leqslant 1, \cdots, |\mu_n| \leqslant 1. \tag{3.6.10}$$

这証明了定理的第一部分.

从

$$|\det A| = |\mu_1|\cdots|\mu_n| \tag{3.6.11}$$

及(3.6.10)可知，$|\det A| = 1$ 的充要条件为

$$|\mu_1| = \cdots = |\mu_n| = 1.$$

但根据定理 3.5.3， $|\det A| = 1$ 的充要条件为 S 把域 D 一一地映为自己．定理完全証明．

§ 3.7. 固定羣． 把一域 D 一一地映为自己的所有解析变换显然成一羣 Γ，这称为域 D 的解析自同胚羣．使域 D 的一点 a 不变的所有解析变换把 D 一一地映为自己者成一羣 Γ_a，称为点 a 的固定羣．Γ_a 是 Γ 的子羣．

定理 3.7.1. 設 Γ_a 是有界域 D 的点 a 的固定羣，則存在一非异的綫性变换把 D 映为 D^* 并把点 a 映为原点，使得 D^* 的固定羣 Γ_0^* 的任一变换之映照函数 f_α^* 在原点的展式为

$$f_\alpha^*(z^*) = \sum_{\beta=1}^{n} u_{\beta\alpha} z_\beta^* + \text{高次項}, \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

其中 $U = (u_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n}$ 是一酉方陣（这个定理包含了 Γ_a 与酉羣的一个紧致子羣同构）．

証． 不妨假定 $a = (0, \cdots, 0)$．命 $T_D(z, \bar{z})$ 为域 D 的度量方陣，习知存在非异的常数方陣 A，使得

$$A T_D(0, 0) \bar{A}' = I.$$

作綫性变换 S：

$$z_\alpha^* = \sum_{\beta=1}^{n} A_{\beta\alpha} z_\beta, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

其中 $A^{-1} = (A_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n}$．設 S 把域 D 映为有界域 D^*，此变换之函数方陣为

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} = A^{-1}.$$

根据定理 2.5.2 知

$$T_{D^*}(0, 0) = \left(\frac{\partial z^*}{\partial z}\right)_{z=0}^{-1} T_D(0, 0) \left(\overline{\frac{\partial z^*}{\partial z}}\right)_{z=0}^{\prime\,-1} = I. \quad (3.7.1)$$

如果 T 是一 Γ_0 的变换，則对应有一 Γ_0^* 的变换 $T^* = STS^{-1}$：

$$w_\alpha^* = f_\alpha(z^*), \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

再应用定理 2.5.2，

$$T_{D^*}(z^*, \bar{z}^*) = \frac{\partial w^*}{\partial z^*} T_{D^*}(w^*, \bar{w}^*) \overline{\frac{\partial w^{*\prime}}{\partial z^*}}.$$

命 $z^* = 0$，则 $w^* = 0$. 由(3.7.1)，上式变为

$$I = \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)_{z^*=0} \left(\overline{\frac{\partial w^*}{\partial z^*}}\right)'_{z^*=0},$$

此乃表示

$$\left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)_{z^*=0}$$

是一酉方陣. 定理得証.

上面証明了 Γ_0^* 的任一变换 T^* 对应有一酉方陣 U^*，此即 T^* 的函数方陣在 $z^* = 0$ 的值. 显然所有这些 U^* 成一酉羣的子羣 $\mathfrak{g}$. 由定理 3.1.2 知不能有两个不同的 T^* 对应为同一的 U^*，故 Γ_0^* 与 $\mathfrak{g}$ 同构. 若 $T_1^*, T_2^*, \cdots$ 是 Γ_0^* 的一串变换，则可取一子串使之收斂为一解析变换 T^*. T^* 也使原点不变. 原点是 D^* 的内点，由定理 3.5.1 知，T^* 也是一一地映 D^* 为自己，故属于 Γ_0^*. 此乃表示 Γ_0^* 是紧致的，故 $\mathfrak{g}$ 亦然.

若域 D 的解析自同胚羣 Γ 包含下面的变换：

$$w_\alpha - a_\alpha = e^{i\theta}(z_\alpha - a_\alpha), \quad \alpha = 1, \cdots, n \tag{3.7.2}$$

其中 θ 为任意的实数，$a = (a_1, \cdots, a_n)$ 为空間 C^n 的一固定点，可以属于 D 也可以不属于 D，则 D 称为以 a 为中心的圓型域. 若 a 属于 D，则 D 称为包含其中心的圓型域，此时(3.7.2)的变换是点 a 的固定羣的一个子羣.

定理 3.7.2. 設 D 是包含其中心$(0, \cdots, 0)$的有界圓型域，则任一在 D 解析的函数 $f(z)$ 能在域 D 中展为級数

$$f(z) = P_0 + P_1(z) + \cdots + P_k(z) + \cdots,$$

其中 $P_k(z)$ 是 $z_1, \cdots, z_n$ 的 k 次齐次多項式；此外能选取一組 $\mathfrak{L}^2(D)$ 的完备正交就范函数系 $\{\varphi_k(z)\}_{k=0,1,\cdots,n}$，使得每一 $\varphi_k(z)$ 皆是 $z_1, \cdots, z_n$ 的齐次多項式，特别是 $\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{V(D)}}$，其中 $V(D)$ 是域 D 的总体积.

証． 取大于 1 的正数 r，以原点为中心，把域 D 收縮 $\frac{1}{r}$ 而得一域 D_r（此即經变換 $w_a = \frac{1}{r} z_a$ 而得的域．注意 D_r 未必包含在 D 中）．显然 D_r 也是包含其中心(即原点)的圓型域．因之若 $(z_1, \cdots, z_n) \in D_r$，則 $(rz_1e^{i\theta}, \cdots, rz_ne^{i\theta}) \in D$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

作函数

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} f(z_1\tau, \cdots, z_n\tau)\frac{d\tau}{\tau - 1},$$

这是 D_r 中的解析函数.

当 z 在原点的充分小邻域中，函数

$$\varphi(\tau) = f(z_1\tau, \cdots, z_n\tau)$$

是在 $|\tau| \leqslant r$ 解析的函数，因此有

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r}\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau - 1} = \varphi(1) = f(z). \quad (3.7.3)$$

另一方面，对任一点 $z \in D_r$，

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} f(z_1\tau, \cdots, z_n\tau)\frac{d\tau}{\tau - 1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} f(z_1\tau, \cdots, z_n\tau)\frac{d\tau}{\tau^{m+1}}. \quad (3.7.4)$$

此級数的每一項在 D_r 解析．我們要証明其在 D_r 的任一紧致集 $\bar{P}_r$ 一致收斂．实际上，当 $(z_1, \cdots, z_n) \in \bar{P}_r$ 时，由 $(z_1r, \cdots, z_nr)$ 所成的点集 $\bar{P}$ 是 D 的紧致集．D 是圓型域，点集

$$\bar{Q} = \{(w_1e^{i\theta}, \cdots, w_ne^{i\theta}) \mid (w_1, \cdots, w_n) \in \bar{P}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

仍然是 D 的点集，它是紧致的，因为对它的任一点串 $(w_1^{(k)}e^{i\theta_k}, \cdots, w_n^{(k)}e^{i\theta_k})$, $k = 1, 2, \cdots$，我們能相应的在 $\bar{P}$ 中取一点串 $\{w^{(k_m)}\}$ 收斂为一点 $w^{(0)} \in \bar{P}$，又能取一实数串 $\{\theta_{k_{m_j}}\}$ 收斂于 $\theta_0 (0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi)$．故 $\lim\limits_{i\to\infty}(w_1^{(k_{m_j})}e^{i\theta_{k_{m_j}}}, \cdots, w_n^{(k_{m_j})}e^{i\theta_{k_{m_j}}}) = (w_1^{(0)}e^{i\theta_0}, \cdots, w_n^{(0)}e^{i\theta_0})$ 仍属 $\bar{Q}$．此乃表示当 $z \in \bar{P}_r$ 时，$f(z_1\tau, \cdots, z_n\tau)$ $(\tau = re^{i\theta})$ 是有界的．故級数(3.7.4)在 $\bar{P}_r$ 一致收斂，因之 $\psi(z)$ 在 D_r 解析.

命

$$P_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} f(z_1\tau, \cdots, z_n\tau)\frac{d\tau}{\tau^{m+1}},$$

则 $P_m(z)$ 是 $z_1, \cdots, z_n$ 的m次齐次多項式，因为易証把 z_α 换为 $z_\alpha e^{i\theta}$ 时有

$$P_m(ze^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} f(z_1\tau e^{i\theta}, \cdots, z_n\tau e^{i\theta})\frac{d\tau}{\tau^{m+1}} =$$

$$= e^{im\theta}P_m(z), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

設

$$P_m(z) = \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} A_{m_1\cdots m_n} z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}.$$

由于 $f(z)$ 在原点的充分小邻域能展为冪級数，而由(3.7.3)知，在此邻域它恆等于 $\psi(z)$，故由冪級数的唯一性定理(定理 1.2.1)知

$$A_{m_1\cdots m_n} = \frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\left[\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f(z)}{\partial z_1^{m_1}\cdots\partial z_n^{m_n}}\right]_{z=0}.$$

此乃表示 $A_{m_1\cdots m_n}$ 与 r 无关，亦即 $\psi(z)$ 在 D_r 的展式

$$\psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z)$$

与 r 无关．命 $r \to 1$，便知 $\psi(z)$ 在D能展为上式．但由(3.7.3)及定理 1.2.2，在整个D中有 $\psi(z) \equiv f(z)$．这証明了定理的第一部分．

注意，上面的証明包含了 $\psi(z)$ 在域 $\tilde{D} = \sum_{0\leqslant r\leqslant 1} D_{1/r}$ 是解析的，因此包含了

定理 3.7.3. 設D为包含其中心的有界圓型域，$\tilde{D}$ 为包含D的以原点为中心的最小星型域[1]，則任一在D解析的函数必可解析展拓至 $\tilde{D}$．

現在証明定理 3.7.2 的第二部分．

把m次单項式

1) 以点 a 为中心的星型域 $\mathfrak{S}$，即一域对其任一点 z，所有适合 $w_\alpha - a_\alpha = r(z_\alpha - a_\alpha)$ $(0\leqslant r\leqslant 1)$的 w 点仍包含于 $\mathfrak{S}$ 者．

$$z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n},\ m_1+\cdots+m_n=m$$

排列成一$\dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$維向量

$$z^{[m]}=(z_1^m,\ z_1^{m-1}z_2,\ \cdots,\ z_n^m),$$

則易証方陣

$$H_m=\int_D z^{[m]'}\overline{z^{[m]}}\dot{z}$$

是定正的，因此有一非异的方陣 A_m，使得

$$H_m=A_m'\overline{A}_m.$$

命

$$\varphi^{[m]}=z^{[m]}A_m^{-1},$$

則 $\varphi^{(m)}$ 的支量

$$\varphi_k^{(m)}(z),\ k=1,2,\cdots,\ \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

显然适合

$$\int_D \varphi_j^{(m)}(z)\overline{\varphi_k^{(m)}(z)}\dot{z}=\delta_{jk}. \tag{3.7.5}$$

如是函数系 $\varphi_j^{(m)}(z)\left(j=1,2,\cdots,\dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!},\ m=0,1,2,\cdots\right)$的每一个 $\varphi_j^{(m)}(z)$ 是 $z_1,\cdots,z_n$ 的 m 次齐次多項式、$\varphi_1^{(0)}$ 是常数，必須等于 $1/\sqrt{V(D)}$. 这是一正交就范函数系，根据(3.7.5)，只要証明

$$\int_D \varphi_j^{(m)}(z)\overline{\varphi_k^{(l)}(z)}\dot{z}=0,\ 当\ m\neq l. \tag{3.7.6}$$

根据假設，D 是圓型域，因此对任意的实数 θ，有

$$e^{i(m-l)\theta}\int_D \varphi_j^{(m)}(z)\overline{\varphi_k^{(l)}(z)}\dot{z}=$$

$$=\int_D\varphi_j^{(m)}(ze^{i\theta})\overline{\varphi_k^{(l)}(ze^{i\theta})}\dot{z}=\int_D \varphi_j^{(m)}(z)\overline{\varphi_k^{(l)}(z)}\dot{z}.$$

故(3.7.6)必定成立.

最后我們証明$\{\varphi_j^{(m)}(z)\}$是完备的.

根据 $\varphi_j^{(m)}(z)$ 的定义，任一 m 次齐次多項式 $P_m(z)$ 能表为

$$P_m(z)=\sum_{j=1}^{C_{m,n}} a_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(z),\quad C_{m,n}=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

而根据定理 3.7.2 的第一部分知，任一在D解析的函数 $f(z)$ 能在 D 中展为

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{C_{m,n}} a_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(z).$$

我們只要証明，如果 $f(z)\in\mathfrak{L}^2(D)$，則必有

$$a_j^{(m)}=\int_D f(z)\overline{\varphi_j^{(m)}(z)}\dot{z}. \tag{3.7.7}$$

我們用一域串 $D_1, D_2, \cdots$ 逼近 D，其中 $\overline{D}_k\subset D_{k+1}$. 我們不妨假定 D_k 皆是圓型域，否則以圓型域 $D_k^*=\{ze^{i\theta}|z\in D_k,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 代替 D_k. 由于 $f(z)$ 的展式在 $\overline{D}_k$ 中一致收斂，而 D_k 为圓型域，因此

$$\int_{D_k} f(z)\overline{\varphi_j^{(m)}(z)}\dot{z}=\sum_{l=0}^{\infty}\int_{D_k} P_l(z)\,\overline{\varphi_j^{(m)}(z)}\dot{z}=$$

$$=\int_{D_k} P_m(z)\,\overline{\varphi_j^{(m)}(z)}\,\dot{z},$$

其中 $P_l(z)$ 是 l 次齐次多項式. 根据(3.7.5)，我們有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{D_k} P_m(z)\,\overline{\varphi_j^{(m)}(z)}\,\dot{z}=\sum_{p=1}^{C_{m,n}} a_p^{(m)}\lim_{k\to\infty}\int_{D_k}\varphi_p^{(m)}\,\overline{\varphi_j^{(m)}}\,\dot{z}=a_j^{(m)}.$$

由此知(3.7.7)成立. 定理 3.7.2 完全証明.

定理 3.7.4. 設D与 D^* 皆是包含原点为中心的有界圓型域，則任一把D一一地映为 D^* 的解析变換 S 使中心互相对应者必为綫性变換；特别是把域D一一地映为自己使中心不变的解析变換必为綫性变換.

証. 設 S 的映照函数为

$$f_\alpha(z)=P_1^{(\alpha)}(z)+P_2^{(\alpha)}(z)+\cdots,\ \alpha=1,\cdots,n \tag{3.7.8}$$

其中 $P_m^{(\alpha)}(z)$ 为m次齐次多項式.

命 T_θ 表变換 $w_\alpha=e^{i\theta}z_\alpha$，則变換 $S^*=ST_\theta S^{-1}$ 把 D^* 一一地映为自己而使原点不变，其映照函数为如下之形式

$$w_a^* = e^{i\theta} z_a^* + \cdots, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

由假設知，D^* 的原点的固定羣包含变换 T_θ^*: $w_a^* = e^{i\theta} z_a^*$. 由唯一性定理(定理 3.1.2)知，必須 $S^* = T_\theta^*$. 由此知 $T_\theta^* S = S T_\theta$. 由(3.7.8)知，后一变换的映照函数有如下之关系：

$$e^{i\theta} f_a(z) = P_1^{(a)}(z) e^{i\theta} + P_2^{(a)}(z) e^{2i\theta} + \cdots,$$

θ 可以是任意的实数，因此必須

$$f_a(z) = P_1^{(a)}(z), \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

定理証明。

若域 D 的解析自同胚羣包含下面的变换：

$$w_a - a_a = e^{i\theta_a}(z_a - a_a), \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

其中 $\theta_1, \cdots, \theta_n$ 为任意的实数，点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 可以属于 D 也可以不属于 D，則 D 称为 Reinhardt 域，而 a 称为中心. 显然 Reinhardt 域必定是圓型域.

定理 3.7.5. 設 D 是包含原点为中心的有界 Reinhardt 域，則任一在 D 解析的函数 $f(z)$ 能在域 D 展为冪級数

$$f(z) = \sum_{m_1, \cdots, m_n = 0}^{\infty} a_{m_1 \cdots m_n} z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}.$$

此外，能在 $\mathfrak{L}^2(D)$ 中选取一組完备的正交就范函数系 $\{\varphi_k(z)\}$，使得每一 $\varphi_k(z)$ 皆是单項式.

此定理之証明方法如定理 3.7.2，讀者試自証之.

§ 3.8. 可递域. 若对域 D 的任两点 a 与 b 存在域 D 的解析自同胚羣 Γ 的变换把 a 点映为 b 点，則 D 称为可递的或齐性的，Γ 称为域 D 的运动羣. 显然，如果域 D 的任一点 a 能以 Γ 的一变换映为域 D 的一固定点 $a^{(0)}$，則 D 是可递的.

定理 3.8.1. 若 D 为有界可递域包含原点者，$f_a(z;t)$ 是把域 D 的 $t = (t_1, \cdots, t_n)$ 点映为原点的 Γ 中的变换之映照函数，則域 D 的核函数

$$K(t, \bar{t}) = c \left| \det \frac{\partial f(z;t)}{\partial z} \right|_{z=t}^2,$$

其中 $c = K(0, 0)$. 特别，若 D 是以原点为中心的圓型域，則

$c=\dfrac{1}{V(D)}$,其中$V(D)$为域D的总体积.

証. 根据定理 2.3.7 知

$$K(z,\bar{z})=K(f(z;t),\overline{f(z;t)})\left|\det\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2.$$

命 $z=t$ 得

$$K(t,\bar{t})=K(0,0)\left|\det\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2_{z=t}.$$

如果D是以原点为中心的圆型域，根据定理 3.7.2 知 $K(0,0)=\dfrac{1}{V(D)}$. 定理証明[1].

定理 3.8.2. 如果D是一包含原点的有界可递域,则对任一点t，域D的度量方阵有下列关系:

$$T(t,\bar{t})=\left(\frac{\partial f(z;t)}{\partial z}\right)_{z=t}T(0,0)\left(\overline{\frac{\partial f(z;t)}{\partial z}}\right)'_{z=t},$$

其中 $f(z;t)=(f_1(z;t),\cdots,f_n(z;t))$是$\Gamma$中把$t$映为原点的变换之映照函数.

此定理乃定理 2.5.2 的直接推論.

定理 3.8.3. 設D是一有界可递域，S是一解析变换映D入其内部. 若有一点 $z^{(0)}\in D$ 使得

$$ds^2(z^{(0)},\bar{z}^{(0)})=ds^2(w^{(0)},\bar{w}^{(0)}),$$

其中 $ds^2(z,\bar{z})$ 表域D的 Bergmann 度量(見 § 2.5)在z点之值，此处 $w^{(0)}=Sz^{(0)}$，則S把域D一一地映为自己.

証. 我們先指出,如果定理在域D成立，則对任一解析等价于D的域D^*亦成立. 实际上,如果解析变换 $T:z^*=\varphi(z)$[2] 把域D一一地映为D^*，則根据定理 2.5.2 知 $ds^2_D(z,\bar{z})=ds^2_{D^*}(z^*,\bar{z}^*)$.

---

1) 此定理說明，有界可递域的核函数可以不必从該域的完备正交就范函数系构造. 相反的，可以从已知的核函数构造該域的完备正交就范系. (参閱陆启鏗[1],第二章 §4).

2) 今后为簡单起見，我們常以 $w=\varphi(z)$ 代表一变换，此即 $w=(w_1,\cdots,w_n)$, $\varphi(z)=(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_n(z))$, 而 $w=\varphi(z)$ 包含了 $w_\alpha=\varphi_\alpha(z)$, $\alpha==1,\cdots,n$.

如是变换 TST^{-1} 把 D^* 映入其内部. 若此变换把 D^* 一一地映为自己,则 S 把 D 一一地映为自己;反之亦然.

我們不妨假設 D 包含原点,而 D 的度量方陣在原点的值等于 I,否則我們可取一解析等价于 D 的域使之适合条件(見定理 3.7.1 的証明).

不妨假定 S 把原点不变. 設 $S: w = f(z)$, 由定理之假設知,

$$dz\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=z^{(0)}} T(w^{(0)}, \overline{w}^{(0)}) \left(\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)'_{z=z^{(0)}} d\overline{z}' = \\ = dzT(z^{(0)}, \overline{z}^{(0)})d\overline{z}'.$$

对任一向量 $dz = (dz_1, \cdots, dz_n)$, 此即

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=z^{(0)}} T(W^{(0)}, \overline{W}^{(0)}) \left(\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)'_{z=z^{(0)}} = T(z^{(0)}, \overline{z}^{(0)}). \quad (3.8.1)$$

命 $T_{z^{(0)}}$ 为 Γ 中的变换把 $z^{(0)}$ 点映为原点者,其映照函数为 $\varphi(z; z^{(0)}) = (\varphi_1(z; z^{(0)}), \cdots, \varphi_n(z; z^{(0)}))$.

根据定理 3.8.2 知

$$T(z^{(0)}, \overline{z}^{(0)}) = \left(\frac{\partial \varphi(z; z^{(0)})}{\partial z}\right)_{z=z^{(0)}} \left(\overline{\frac{\partial \varphi(z; z^{(0)})}{\partial z}}\right)'_{z=z^{(0)}}$$

及

$$T(w^{(0)}, \overline{w}^{(0)}) = \left(\frac{\partial \varphi(w; w^{(0)})}{\partial w}\right)_{w=w^{(0)}} \left(\overline{\frac{\partial \varphi(w; w^{(0)})}{\partial w}}\right)'_{w=w^{(0)}}.$$

由(3.8.1)可得

$$\left(\frac{\partial \varphi(z; z^{(0)})}{\partial z}\right)^{-1}_{z=z^{(0)}} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)_{z=z^{(0)}} \left(\frac{\partial \varphi(w; w^{(0)})}{\partial w}\right)_{w=w^{(0)}} \times \\ \times \left(\overline{\frac{\partial \varphi(w; w^{(0)})}{\partial w}}\right)'_{w=w^{(0)}} \left(\overline{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}\right)'_{z=z^{(0)}} \left(\overline{\frac{\partial \varphi(z; z^{(0)})}{\partial z}}\right)'^{-1}_{z=z^{(0)}} = I. \tag{3.8.2}$$

若命 $S^* = T_{w^{(0)}} S T^{-1}_{z^{(0)}}$, 則 S^* 是把 D 映入其内部且把原点固定不变的解析变换,它在原点的函数行列式的值,即方陣

$$\left(\frac{\partial \varphi(z; z^{(0)})}{\partial z}\right)^{-1}_{z=z^{(0)}} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)_{z=z^{(0)}} \left(\frac{\partial \varphi(w; w^{(0)})}{\partial w}\right)_{w=w^{(0)}}$$

的行列式之値. 由(3.8.2)知此方陣的行列式之絕对值等于 1. 根

据定理 3.5.3 知，S^* 是把 D 一一地映为自已，故 $S=T_{w(0)}^{-1} S^* T_{z(0)}$ 亦然．定理証明．

現在的問題是，是否存在与 Bergmann 度量相对应的 Schwarz-Pick 定理，即如果解析变换 S 把 D 映入其內部，則恆有

$$ds^2(w, \bar{w}) \leqslant ds^2(z, \bar{z})?$$

这里有一反例．命

$$P_2 = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}.$$

取正数

$$\varepsilon < \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

則变換

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\varepsilon)z_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon z_2, \\ w_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\varepsilon)z_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon z_2 \end{cases} \tag{3.8.3}$$

把 P_2 映入其內部，因为

$$|w_1| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}z_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon(z_1+z_2)\right|$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|z_1| + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon(|z_1|+|z_2|)$$

$$< \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\varepsilon < 1,$$

$$|w_2| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}z_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon(-z_1+z_2)\right|$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|z_1| + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon(|z_1|+|z_2|) < 1.$$

在 § 2.5 例(1)中知道，双圓柱 P_2 的度量方陣为

$$T(z, \bar{z}) = 2\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1-|z_1|^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(1-|z_2|^2)^2} \end{pmatrix},$$

故

$$T(0,0)=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

又变换(3.8.3)的函数方陣为

$$\frac{\partial W}{\partial z}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\varepsilon) & -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\varepsilon)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\end{pmatrix},$$

因此

$$\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_{z=0} T(0,0)\left(\overline{\frac{\partial W}{\partial z}}\right)'_{z=0}=2\begin{pmatrix}(1+\varepsilon)^2 & 0\\ 0 & \varepsilon^2\end{pmatrix}\not\leqslant 2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

此乃表示 Schwartz 引理不能在双圓柱成立.

但我們有下面的定理:

定理 3.8.4. 如果有界域 D 是可递的,则存在一正数 k 只与域 D 有关,使得对任一有界域 $\mathfrak{g}$ 及任一把 $\mathfrak{g}$ 映入 D 的解析变换 S: $w=f(z)$,恆有

$$\frac{\partial w}{\partial z}T_D(W,\overline{W})\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}\leqslant k^2 T_{\mathfrak{g}}(z,\bar{z}),$$

此即

$$ds_D^2(W,\overline{W})\leqslant k^2 ds_{\mathfrak{g}}^2(z,\bar{z}).$$

證. 命域 D 的运动羣 Γ 中把域 D 的点 $s=(s_1,\cdots,s_n)$ 映为一固定点 $w^{(0)}$ 的映照为 $w^*=\varphi(w;s)$, $s=(s_1,\cdots,s_n)$,则由定理 2.5.2 知

$$T_D(s,\bar{s})=\left(\frac{\partial\varphi(w;s)}{\partial w}\right)_{w=s}T_D(w^{(0)},\overline{w}^{(0)})\left(\overline{\frac{\partial\varphi(w;s)}{\partial w}}\right)'_{w=s}.$$

命 $\mu_D(w^{(0)})$ 为 $T_D(w^{(0)},\overline{w^{(0)}})$ 的最大特征根,则

$$T_D(w^{(0)},\overline{w^{(0)}})\leqslant\mu_D(w^{(0)})I.$$

由此得

$$T_D(s,\bar{s})\leqslant\mu_D(w^{(0)})\left(\frac{\partial\varphi(w;s)}{\partial w}\right)_{w=s}\left(\overline{\frac{\partial\varphi(w;s)}{\partial w}}\right)'_{w=s}. \quad (3.8.4)$$

定理假設 D 是有界的,故存在一正数 M,使得

$$\sum_{\alpha=1}^{n} |\varphi_\alpha(w; s)|^2 \leqslant M^2. \tag{3.8.5}$$

现在我們只考虑 D 中的点 s 是变换 S 的象点的情形. 設 s 为 $t=(t_1, \cdots, t_n)\in \mathfrak{g}$ 的象点,即 $s=f(t)$, 由(3.8.5)知

$$\sum_{\alpha=1}^{n} |\varphi_\alpha(f(z); s)|^2 \leqslant M^2. \tag{3.8.6}$$

由于 $\varphi_\alpha(f(z); s)$ 是 z 的在 $\mathfrak{g}$ 的解析函数,应用定理 3.6.2 知

$$\frac{\partial \varphi(f(z); s)}{\partial z} \overline{\frac{\partial \varphi(f(z); s)}{\partial z}}' \leqslant M^2 T_{\mathfrak{g}}(z, \bar{z}). \tag{3.8.7}$$

由于

$$\frac{\partial \varphi(f(z); s)}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial \varphi(w; s)}{\partial w},$$

以之代入(3.8.7),幷命 $z=t$ 得

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi(w; s)}{\partial w}\right)_{w=s} \left(\overline{\frac{\partial \varphi(w; s)}{\partial w}}\right)'_{w=s} \overline{\frac{\partial f(t)}{\partial t}}' \leqslant M^2 T_{\mathfrak{g}}(t, \bar{t}). \tag{3.8.8}$$

应用(3.8.4)及(3.8.8)得

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} T_D(s, \bar{s}) \overline{\frac{\partial f(t)}{\partial t}}' \leqslant \mu_D(w^{(0)}) \frac{\partial f(t)}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi(w; s)}{\partial w}\right)_{w=s} \times$$

$$\times \left(\overline{\frac{\partial \varphi(w; s)}{\partial w}}\right)'_{w=s} \overline{\frac{\partial f(t)}{\partial t}}' \leqslant \mu_D(w^{(0)}) M^2 T_{\mathfrak{g}}(t, \bar{t}).$$

我們取 $k=M\sqrt{\mu_{\mathfrak{g}}(w^{(0)})}$, 便有

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} T_D(s, \bar{s}) \overline{\frac{\partial f(t)}{\partial t}}' \leqslant k^2 T_{\mathfrak{g}}(t, \bar{t}).$$

t 可以是 $\mathfrak{g}$ 的任一点,故定理得証.

特别当 $\mathfrak{g}=D$ 时, 使得定理 3.8.4 成立的最小正数 k 命之为 $k_0(D)$. $k_0(D)$ 是一解析不变量[1], 即如果域 D^* 与 D 解析等价,则

$$k_0(D)=k_0(D^*).$$

解析映照的基本問題是在解析等价下域的分类問題, 即确定

1) 参閱陆启鏗[2],[3].

两域在什么条件下解析等价．这个問題还远沒有解决．在单复变的情形，习知任一单連通区域边界上多于一点者解析等价于单位圓，在多变数的情形就十分复杂了． 例如 $n=2$，双圓柱 $P_2=\{|z_1|<1,|z_2|<1\}$ 与单位超球 $S_2=\{|z_1|^2+|z_2|^2<1\}$ 皆是单連通的，且彼此拓扑等价． 但根据 § 2.5 例(i)与(ii)知，P_2 的酉曲率不是常数而 S_2 的酉曲率为常数，又根据定理 2.5.4 知，P_2 与 S_2 非解析等价．

从上面的例知，P_2 与 S_2 不等价的判别是借助于酉曲率这个解析不变量． 我們知道的解析不变量愈多，則判別两域是否不等价愈容易，因为两域只要有一个解析不变量不相等便非等价． 但寻找一組完整的解析不变量，即两域的此組不变量各个相等，便足以判別此两域等价者，是十分困难的問題．

关于域的解析等价下的分类問題，比較好的結果是属于 É. Cartan 的[1]．他考虑有界的**对称域**(不一定要求单叶的)，即此域的任一点 a 有一解析自同胚变换 S_a，把点 a 也只有点 a 固定不变，而 $S_a\neq E$，但 $S_a^2=E$． 他証明任一有界对称域必映为下面的域之一或它們的有限个拓扑乘积：

(i) 是 mn 个复变数 $z_{j\alpha}$ $(j=1,\cdots,m;\ \alpha=1,\cdots,n)$ 空間的域，由关系式

$$I-Z\bar{Z}'>O$$

定义，其中 $Z=(z_{j\alpha})_{1\leqslant j\leqslant m,\,1\leqslant\alpha\leqslant n}$ 是 $m\times n$ 矩陣；

(ii) 是 $\frac{1}{2}p(p+1)$ 个复变数 $z_{\alpha\beta}=z_{\beta\alpha}$ $(\alpha,\beta=1,\cdots,p)$ 空間的域，由关系式

$$I-Z\bar{Z}>O$$

定义，其中 $Z=(z_{\alpha\beta})$ 是 $p\times p$ 对称方陣；

(iii) 是 $\frac{1}{2}q(q-1)$ 个复变数 $z_{\alpha\beta}=-z_{\beta\alpha}$ $(\alpha,\beta=1,\cdots,q)$ 空間的域，由关系式

---

1) É. Cartan[1].

$$I + Z\bar{Z} > 0$$

定义,其中 $Z = (z_{\alpha\beta})$ 是 $q \times q$ 斜对称方陣;

(iv) 是N个复变数 $z_\alpha(\alpha = 1, \cdots, N)$ 空間的域,由关系式

$$\begin{cases} 1 + |zz'|^2 - 2z\bar{z}' > 0, \\ 1 - |zz'| > 0 \end{cases}$$

定义,其中 $z = (z_1, \cdots, z_N)$ 是一N維向量;

(v) 还有两个分别是16維与27維复空間的域,还未具体定出.

É. Cartan 的結果証明,要用到許多李羣的知識. 这里不准备叙述.

不难証明,一有界对称域必然是一可递域. 但反过来是否一有界可递域必是对称的呢?这是著名的 É. Cartan 問題. 当复变数的数目 $n=1, 2, 3$ 时, É. Cartan 的猜想是对的. 但对一般的 n,这猜想二十多年来沒有解决,直到最近苏联 Пятецкий-Шапиро [1]在 $n = 4,5$ 时举出反例,他指出域

$$\frac{1}{i}(Z - \bar{Z}) - u\bar{u}' - \bar{u}u' > 0, \ Z = \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ z_2 z_3 \end{pmatrix}, \ u = \begin{pmatrix} z_4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}$$

是可递的,解析等价于一有界域,但非对称的. 他的証明要用到特征流形的性質. 陆启鏗与許以超[1]在此基础上构造出 $n \geqslant 6$ 的反例,証明方法仅是計算这些域的黎曼曲率,指出它可以 $\geqslant 0$,而对称空間的黎曼曲率必 < 0. 这样同时对有界可递域的黎曼曲率必 $\leqslant 0$ 的一个猜想[1)]也給以反例.

現在解析映照的重要問題便成为非对称的可递域的分类問題[2)].

另一頗重要的問題是:如何判别一域是否可約,即一域是否能解析等价于两較低維的域的拓扑积. 非可約的域称为不可約. 下面的定理有时可以用来帮助判别可約性.

1) 华罗庚[3].

2) 在本书排版以后,作者蒙 Какичев 同志贈送 Пятецкий-Шапиро 最近著作"Геометрия классических областей и теория автоморфных функций". 从这篇文章得知,有界非对称可递域有很多例子,陆启鏗与許以超所举的例也包括其中. 此外,該文作者称,他已将有界可递域分类. 如果是这样,那是解析映照的又一重大发展.

定理 3.8.5. 設有界域D是 $z_1, \cdots, z_m$ 空間的域D_1与 $z_{m+1}, \cdots, z_n$ 空間的域 D_2的拓扑积，并設域D容許单参数解析变换羣

$$\overset{*}{z}_\alpha = \varphi_\alpha(z; t) = z_\alpha + \xi_\alpha(z)t + \cdots, \tag{3.8.9}$$

則此等解析变换必能书为下面的形式

$$\overset{*}{z}_j = \varphi_j(z_1, \cdots, z_m; t), \quad j = 1, \cdots, m$$

$$\overset{*}{z}_{m+j} = \varphi_{m+j}(z_{m+1}, \dots, z_n; t), \quad j = 1, \cdots, n - m.$$

其中第一組映照函数把 D_1一一地映为自己，而第二組把D_2一一地映为自己.

我們首先証明：

定理 3.8.6. 若D是有界可递域，則其 Ricci 曲率恆等于-1.

証. 不妨假定D包含原点. 命 $f(z; z^{(0)})$ 是把域D的$z^{(0)}$点映为原点而使域D一一地映为自己的映照函数. 从定理 3.8.1 与 3.8.2 可得

$$K(z^{(0)}, \bar{z}^{(0)}) = c \left| \det \frac{\partial f(z; z^{(0)})}{\partial z} \right|^2_{z=z^{(0)}}$$

及

$$\det T(z^{(0)}, \bar{z}^{(0)}) = c_1 \left| \det \frac{\partial f(z; z^{(0)})}{\partial z} \right|^2_{z=z^{(0)}},$$

其中c与c_1为常数. $z^{(0)}$可以是D的任一点，故有

$$\frac{\partial^2 \log K(z, \bar{z})}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} = \frac{\partial^2 \log T(z, \bar{z})}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}.$$

根据定义上式即(見(2.5.1)及(2.5.25))

$$T_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z}) = -R_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z}), \tag{3.8.10}$$

而 Ricci 曲率为

$$\frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} R_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z}) dz_\alpha \overline{dz_\beta}}{\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} T_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z}) dz_\alpha \overline{dz_\beta}} = -1.$$

定理証明.

現証定理 3.8.5. 根据定理 2.7.1，(3.8.9) 是微分方程

$$\frac{d\overset{*}{z}_\alpha}{dt} = \xi_\alpha(\overset{*}{z})$$

的解，故我們只須証明 ξ_j 当 $j=1,\cdots,m$ 时只包含变数 $z_1,\cdots,z_m$ 而 $\xi_{m+j}(j=1,\cdots,n-m)$ 只包含变数 $z_{m+1},\cdots,z_n$，定理便証明了. 又因 ξ_α 是解析函数，我們不妨假定 D 包含原点，而証明在原点的邻域有 $\xi_j=\xi_j(z_1,\cdots,z_m)$ $(j=1,\cdots,m)$，$\xi_{m+j}=\xi_{m+j}(z_{m+1},\cdots,z_n)(j=1,\cdots,n-m)$ 便可以了. 这样我們有可能选择一适当的局部坐标，使得証明方便一些.

由于 $D=D_1\times D_2$，根据定理 2.3.6，域 D 的核函数

$$K(z,\bar{z})=K_1(z^{(1)},\overline{z^{(1)}})K_2(z^{(2)},\overline{z^{(2)}}),\tag{3.8.11}$$

其中 K_1, K_2 分别是域 D_1, D_2 的核函数，$z^{(1)}=(z_1,\cdots,z_m)$，$z^{(2)}=(z_{m+1},\cdots,z_n)$. 由此知

$$T_{\alpha\bar{\beta}}=\frac{\partial^2\log K}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}=\begin{cases}\dfrac{\partial^2\log K_1}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}=\overset{(1)}{T}_{\alpha\bar{\beta}}(z^{(1)},\overline{z^{(1)}}),\text{当 }\alpha\leqslant m,\beta\leqslant m;\\ \dfrac{\partial^2\log K_2}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}=\overset{(2)}{T}_{\alpha\bar{\beta}}(z^{(2)},\overline{z^{(2)}}),\text{当 }\alpha>m,\beta>m;\\ 0,\ \text{非上述的两情形},\end{cases}\tag{3.8.12}$$

其中 $\overset{(1)}{T}_{\alpha\bar{\beta}}$ 是域 D_1 的度量方陣的元素，$\overset{(2)}{T}_{\alpha\bar{\beta}}$ 是域 D_2 的度量方陣的元素.

同理可有 Ricci 曲率张量的关系

$$R_{\alpha\bar{\beta}}=\frac{\partial^2\log\det T}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}=\begin{cases}\overset{(1)}{R}_{\alpha\bar{\beta}},\ \text{当 }\alpha\leqslant m,\ \beta\leqslant m;\\ \overset{(2)}{R}_{\alpha\bar{\beta}},\ \text{当 }\alpha>m,\ \beta>m;\\ 0,\ \text{非上面之两情形}.\end{cases}\tag{3.8.13}$$

根据定理 2.7.2，$\xi_\alpha(z)$ 必須满足 Killing 方程 (2.7.5). 根据 (3.8.12)，此方程能书为如下形式：

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial\overset{(1)}{T}_{k\bar{l}}}{\partial z_j}\xi_j+\frac{\partial\overset{(1)}{T}_{k\bar{l}}}{\partial\bar{z}_j}\bar{\xi}_j+\overset{(1)}{T}_{j\bar{l}}\frac{\partial\xi_j}{\partial z_k}+\overset{(1)}{T}_{k\bar{j}}\overline{\frac{\partial\xi_j}{\partial z_l}}\right)=0,$$

$$k,l=1,\cdots,m;$$

$$\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{\partial\overset{(2)}{T}_{k\bar{l}}}{\partial z_j}\xi_j+\frac{\partial\overset{(2)}{T}_{k\bar{l}}}{\partial\bar{z}_j}\bar{\xi}_j+\overset{(2)}{T}_{j\bar{l}}\frac{\partial\xi_j}{\partial z_k}+\overset{(2)}{T}_{k\bar{j}}\overline{\frac{\partial\xi_j}{\partial z_l}}\right)=0,$$

$$k,l=m+1,\cdots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \overset{(1)}{T}_{j\bar{l}} \frac{\partial \xi_j}{\partial z_k} + \sum_{j=m+1}^{n} \overset{(2)}{T}_{k\bar{j}} \overline{\frac{\partial \xi_j}{\partial z_l}} = 0,$$

$$l = 1, \cdots, m, \quad k = m+1, \cdots, n. \qquad (3.8.14)$$

我們不妨假定

$$\overset{(1)}{T}_{k\bar{l}}(0, 0) = \delta_{lk}, \quad l, k = 1, \cdots, m$$

否則可作 $z_1, \cdots, z_m$ 的綫性变換使之如此. 又我們可作局部坐标变換(2.7.11),使得(2.7.19)成立(ζ 选之为 0). 此即可以假定

$$\overset{(1)}{T}_{k\bar{l}}(z^{(1)}, 0) = \overset{(1)}{T}_{k\bar{l}}(0, 0) = \delta_{kl}, \quad k, l=1, \cdots, m. \quad (3.8.15)$$

同样,可以假定

$$\overset{(2)}{T}_{k\bar{l}}(z^{(2)}, 0) = \overset{(2)}{T}_{k\bar{l}}(0, 0) = \delta_{kl}, \quad k, l=m+1, \cdots, n. \quad (3.8.16)$$

根据定理 1.2.4, 在方程(3.8.14)中,在原点的充分小邻域把 z 与 $\bar{z}$ 看作两組独立的变数时仍然成立. 我們单独命 $\bar{z} = 0$, 則由(3.8.15)与(3.8.16)知,(3.8.14)的第三式为

$$\frac{\partial \xi_l(z)}{\partial z_k} + \left[\overline{\frac{\partial \xi_k(z)}{\partial z_l}}\right]_{z=0} = 0,$$

$$l = 1, \cdots, m, \quad k = m+1, \cdots, n,$$

此即

$$\frac{\partial \xi_l(z)}{\partial z_k} = a_{lk}, \quad l=1, \cdots, m, \quad k=m+1, \cdots, n, \quad (3.8.17)$$

其中 $a_{lk} = -\left[\overline{\frac{\partial \xi_k(z)}{\partial z_l}}\right]_{z=0}$ 为常数.

同理,若命 $z = 0$, 可有

$$\overline{\frac{\partial \xi_k(z)}{\partial z_l}} = b_{kl}, \quad k=m+1, \cdots, n, \quad l=1, \cdots, m \quad (3.8.18)$$

其中 $b_{kl} = -\left[\frac{\partial \xi_l(z)}{\partial z_k}\right]_{z=0}$ 为常数.

以(3.8.17)与(3.8.18)代入(3.8.14)第三式得

$$\sum_{j=1}^{m} \overset{(1)}{T}_{j\bar{l}}(z^{(1)}, \overline{z^{(1)}}) a_{jk} + \sum_{j=m+1}^{n} \overset{(2)}{T}_{k\bar{j}}(z^{(2)}, \overline{z^{(2)}}) b_{jl} = 0.$$

在上式对 $z_r(r=1,\cdots,m)$ 微分得

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \overset{(1)}{T}_{j\bar{l}}}{\partial z_r}a_{jk}=0.$$

以 $\overset{(1)}{T}_{\bar{l}r}$ 乘上式,对 r,l 从 1 至 m 而加之得

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \log\det \overset{(1)}{T}}{\partial z_j}a_{jk}=0.$$

由此知

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 \log\det \overset{(1)}{T}}{\partial z_j\partial \bar{z}_s}a_{jk}=0,\quad s=1,\cdots,m.$$

此即

$$\sum_{j=1}^{m}\overset{(1)}{R}_{j\bar{s}}a_{jk}=0,\quad s=1,\cdots,m,\quad k=m+1,\cdots,n. \tag{3.8.19}$$

由于假設 D 是有界可递,应用(3.8.10)知

$$R_{\alpha\bar{\beta}}=-T_{\alpha\bar{\beta}}.$$

由此及由(3.8.12)与(3.8.13)得

$$\overset{(1)}{R}_{j\bar{s}}=-\overset{(1)}{T}_{j\bar{s}},\quad j,s=1,\cdots,m$$

$$\overset{(2)}{R}_{j\bar{s}}=-\overset{(2)}{T}_{j\bar{s}},\quad j,s=m+1,\cdots,n.$$

因此(3.8.19)可书为

$$\sum_{j=1}^{m}\overset{(1)}{T}_{j\bar{s}}a_{jk}=0.$$

由于 $\overset{(1)}{T}$ 是定正的,故必須

$$a_{jk}=0,\quad j=1,\cdots,m,\quad k=m+1,\cdots,n.$$

同理可証

$$b_{kl}=0,\quad k=m+1,\cdots,n,\quad l=1,\cdots,m.$$

以之代入(3.8.17)与(3.8.18)得

$$\frac{\partial\xi_l(z)}{\partial z_k}=\frac{\partial\xi_k(z)}{\partial z_l}=0,\quad l=1,\cdots,m,\quad k=m+1,\cdots,n.$$

此乃表示 ξ_α 当 $\alpha=1,\cdots,m$ 时不包含 $z_{m+1},\cdots,z_n$,而当 $\alpha=m+1,\cdots,n$ 时不包含 $z_1,\cdots,z_m$. 这証明了定理 3.8.5.

由于 H. Cartan[2]曾証明有界可递域的解析变换羣的連通部分是由单参数解析变换羣生成，因此，如一有界可递域是两个較低維域的拓扑积，則这些变换的映照函数必須为如下的形式：

$$w_j = \varphi_j(z_1, \cdots, z_m), \quad j = 1, \cdots, m$$

$$w_{m+j} = \varphi_{m+j}(z_{m+1}, \cdots, z_n), \quad j = 1, \cdots, n - m.$$

IV. 零点与奇異点

§ **4.1. Weierstrass 預备定理.** 命 $O_a^n = O_a^n(z)$ 表示在 C^n 的点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 的一邻域（不是固定的）内所有收斂的 $z_1, \cdots, z_n$ 的 n 重冪級数的全体，亦即所有在点 a 解析的函数. 如果 $a = (0, \cdots, 0)$，我們簡单地书 O_a^n 为 O^n. 这里顺便提及，O_a^n 的元素对于普通的加法与乘法成一交換环，它有么元素 1 而无零除数[1].

設 $P(z) \in O^n$，我們把它写为

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z_2, \cdots, z_n) z_1^\nu$$

时，z_1^ν 的系数 $P_\nu(z_2, \cdots, z_n)$ 是代表 $z_2, \cdots, z_n$ 在原点的一邻域收斂的冪級数.

定理 4.1.1 (Späth 定理). 設已与 O^n 的元素

$$P(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z_2, \cdots, z_n) z_1^\nu, \tag{4.1.1}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l} P_\nu(0, \cdots, 0) = 0, \quad \nu = 0, 1, \cdots, k-1; \\ P_k(0, \cdots, 0) = \chi \neq 0, \end{array}\right\} \tag{4.1.2}$$

则对任一 O^n 的元素

$$B(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(z_2, \cdots, z_n) z_1^\nu, \tag{4.1.3}$$

在 O^n 中存在唯一的

$$Q(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(z_2, \cdots, z_n) z_1^\nu \tag{4.1.4}$$

---

1) 即对于 O_a^n 中任意两个元素 α 与 β，如果 $\alpha\beta = 0$，那末 $\alpha = 0$ 或者 $\beta = 0$.

及

$$H(z) = \sum_{\nu=0}^{k-1} H_\nu(z_2, \cdots, z_n) z_1^\nu, \tag{4.1.5}$$

其中

$$H_\nu(0, \cdots, 0) = -B_\nu(0, \cdots, 0), \quad \nu = 0, \cdots, k-1 \tag{4.1.6}$$

使得

$$Q(z)P(z) - B(z) \equiv H(z). \tag{4.1.7}$$

証． 我們不妨假設 $\chi = 1$.

(i) 我們首先証明，冪級数 Q 与 H 的系数可以根据恆等式(4.1.7)而由 P 与 B 的系数唯一确定.

在(4.1.7)比較 z_1^ν 的系数得

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} Q_\mu P_{\nu-\mu} - B_\nu \equiv H_\nu, \quad \nu = 0, 1, \cdots, k-1 \tag{4.1.8}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} Q_\mu P_{\nu-\mu} - B_\nu \equiv 0, \quad \nu \geqslant k. \tag{4.1.9}$$

下面我們將証明，从恆等式(4.1.9)便足以把冪級数 $Q_\nu(\nu=0, 1, \cdots)$的系数全部而且唯一地确定. 以之代入(4.1.8)，于是 H_ν 也唯一地确定了. 并且命 $z_2 = \cdots = z_n = 0$ 时，由(4.1.8)得出(4.1.6).

命

$$P_\nu = \sum_{\alpha=0}^{\infty} P_{\nu\alpha}(z_2, \cdots, z_n),$$

$$Q_\nu = \sum_{\alpha=0}^{\infty} Q_{\nu\alpha}(z_2, \cdots, z_n),$$

$$B_\nu = \sum_{\alpha=0}^{\infty} B_{\nu\alpha}(z_2, \cdots, z_n), \quad \nu = 0, 1, \cdots.$$

其中 $P_{\nu\alpha}$, $Q_{\nu\alpha}$, $B_{\nu\alpha}$ 是 $z_2, \cdots, z_n$ 的 α 次齐次多項式. 此时条件(4.1.2)即

$$\left.\begin{array}{l} P_{\nu 0} = 0, \quad \nu = 0, 1, \cdots, k-1, \\ P_{k0} = 1. \end{array}\right\} \tag{4.1.2'}$$

由(4.1.9)知

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} B_{\nu\lambda} \equiv \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\alpha=0}^{\infty} Q_{\mu\alpha} \sum_{\beta=0}^{\infty} P_{\nu-\mu,\beta} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\lambda} Q_{\mu\alpha} P_{\nu-\mu,\lambda-\alpha}.$$

比較上式的齐 λ 次項,并利用条件(4.1.2)′得

$$B_{\nu\lambda} \equiv \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\alpha=0}^{\lambda} Q_{\mu\alpha} P_{\nu-\mu,\lambda-\alpha} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\alpha=0}^{\lambda-1} Q_{\mu\alpha} P_{\nu-\mu,\lambda-\alpha} + \sum_{\mu=0}^{\nu} Q_{\mu\lambda} P_{\nu-\mu,0} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\alpha=0}^{\lambda-1} Q_{\mu\alpha} P_{\nu-\mu,\lambda-\alpha} + \sum_{\mu=0}^{\nu-k-1} Q_{\mu\lambda} P_{\nu-\mu,0} + Q_{\nu-k,\lambda}.$$

以 ν 换为 $\nu+k$ 得

$$Q_{\nu\lambda} \equiv B_{\nu+k,\lambda} - \sum_{\mu=0}^{\nu+k} \sum_{\alpha=0}^{\lambda-1} Q_{\mu\alpha} P_{\nu-\mu+k,\lambda-\alpha} -$$

$$- \sum_{\mu=0}^{\nu-1} Q_{\mu\lambda} P_{\nu-\mu+k,0}. \tag{4.1.10}$$

由上式可見, $\nu=0$, $\lambda=0$ 时

$$Q_{00} = B_{k0}.$$

此乃表示 Q_{00} 唯一地被 $B(z)$ 所决定.

命 $\lambda=0$,(4.1.10)变为

$$Q_{\nu 0} \equiv B_{\nu+k,0} - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} Q_{\mu 0} P_{\nu-\mu+k,0}.$$

由于 Q_{00} 已被 $B(z)$ 所唯一决定,上式表示,当 $Q_{00}, Q_{10}, \cdots, Q_{\nu-1,0}$ 已确定时, $Q_{\nu 0}$ 也确定. 因之所有 $Q_{\nu 0}$ 唯一地确定.

假定 $Q_{\nu 0}, Q_{\nu 1}, \cdots, Q_{\nu,\lambda-1}$ $(\nu=0, 1, \cdots)$ 都已确定, 由(4.1.10)知, $Q_{0\lambda}$ 唯一确定,并且 $Q_{\nu\lambda}$ 当 $Q_{0\lambda}, \cdots, Q_{\nu-1,\lambda}$ 唯一确定后也唯一地被确定. 因此所有 $Q_{\nu\lambda}$ 都被 $B(z)$ 和 $P(z)$ 唯一地确定.

(ii) 現在証明 $Q(z)$ 与 $H(z)$ 在原点的某一邻域收斂. 由(4.1.8)知,我們只要証明 $Q(z)$ 收斂.

因为 $P(z)$ 与 $B(z)$ 在原点的一邻域收斂,且在一閉邻域

$$|z_1| \leqslant \sigma, \ |z_2| \leqslant \rho, \ \cdots, \ |z_n| \leqslant \rho$$

絕对收斂与一致收斂,因此有一正数 M,使得在此邻域内

$$|P_{\nu\alpha}(z_2, \cdots, z_n)z_1^\nu| < M,$$
$$|B_{\nu\alpha}(z_2, \cdots, z_n)z_1^\nu| < M.$$

取 $z_1 = \sigma$ 得

$$\left.\begin{aligned} |P_{\nu\alpha}(z_2, \cdots, z_n)| &< \frac{M}{\sigma^\nu}, \\ |B_{\nu\alpha}(z_2, \cdots, z_n)| &< \frac{M}{\sigma^\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.11}$$

此式当 $z_2, \cdots, z_n$ 在閉多圓柱 A_ρ:

$$|z_2| \leqslant \rho, \ \cdots, \ |z_n| \leqslant \rho$$

皆成立.

我們要証明,对所有的 $\nu, \lambda = 0, 1, 2, \cdots$, $Q_{\nu\lambda}(z_2, \cdots, z_n)$ 在 A_ρ 适合

$$|Q_{\nu\lambda}(z_2, \cdots, z_n)| < \frac{K}{\sigma^k}\left(\frac{d}{\sigma}\right)^\nu c^\lambda, \tag{4.1.12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &d > \frac{2M}{\sigma^k} + 1, \quad c > d^{k+1} + 1, \\ &K > \max\left\{M, \frac{(d-1)M\sigma^k}{(d-1)\sigma^k - 2M}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.13}$$

由于 $Q_{00} = B_{k0}$,(4.1.12)显然成立. 而所有的 $Q_{\nu\lambda}$ 是由公式(4.1.10)遞推而得,因此只要証明:如果(4.1.10)右端出現的 $Q_{\mu\alpha}$ 皆适合(4.1.12),則(4.1.10)的左端的 $Q_{\nu\lambda}$ 亦适合(4.1.12).

根据(4.1.10)及(4.1.11)

$$|Q_{\nu\lambda}| < \frac{M}{\sigma^{\nu+k}} + \sum_{\mu=0}^{\nu+k}\sum_{\alpha=0}^{\lambda-1}\frac{K}{\sigma^k}\left(\frac{d}{\sigma}\right)^\mu c^\alpha \frac{M}{\sigma^{\nu-\mu+k}} +$$

$$+\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{K}{\sigma^k}\left(\frac{d}{\sigma}\right)^{\mu}c^{\lambda}\frac{M}{\sigma^{\nu-\mu+k}}=$$

$$=\frac{M}{\sigma^{\nu+k}}+\frac{KM}{\sigma^{\nu+2k}}\sum_{\mu=0}^{\nu+k}\sum_{\alpha=0}^{\lambda-1}d^{\mu}c^{\alpha}+\frac{KM}{\sigma^{\nu+2k}}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}d^{\mu}c^{\lambda}=$$

$$=\frac{M}{\sigma^{\nu+k}}+\frac{KM}{\sigma^{\nu+2k}}\frac{d^{\nu+k+1}-1}{d-1}\frac{c^{\lambda}-1}{c-1}+\frac{KM}{\sigma^{\nu+2k}}\frac{d^{\nu}-1}{d-1}c^{\lambda}<$$

$$<\frac{M}{\sigma^{\nu+k}}+\frac{KMd^{\nu+k+1}c^{\lambda}}{\sigma^{\nu+2k}(d-1)(c-1)}+\frac{KMd^{\nu}c^{\lambda}}{\sigma^{\nu+2k}(d-1)}=$$

$$=\frac{K}{\sigma^k}\left(\frac{d}{\sigma}\right)^{\nu}c^{\lambda}\left[\frac{M}{Kd^{\nu}c^{\lambda}}+\frac{Md^{k+1}}{\sigma^k(d-1)(c-1)}+\frac{M}{\sigma^k(d-1)}\right].$$

根据(4.1.13)知

$$\frac{M}{Kd^{\nu}c^{\lambda}}+\frac{Md^{k+1}}{\sigma^k(d-1)(c-1)}+\frac{M}{\sigma^k(d-1)}<$$

$$<\frac{(d-1)\sigma^k-2M}{(d-1)\sigma^k}+\frac{2M}{\sigma^k(d-1)}=1,$$

因此(4.1.12)恆成立.

我們取多圓柱

$$|z_1|<\theta\frac{\sigma}{d},\quad |z_2|<\frac{\theta\rho}{c},\cdots,|z_n|<\frac{\theta\rho}{c},\quad 0<\theta<1. \tag{4.1.14}$$

显然当 z 在 (4.1.14) 时, $\frac{cz_2}{\theta},\cdots,\frac{cz_n}{\theta}$ 是 A_ρ 的点. 由于 $Q_{\nu\lambda}(z_2,\cdots,z_n)$ 是 $z_2,\cdots,z_n$ 的齐 λ 次多項式,根据(4.1.12)我們有

$$|Q_{\nu\lambda}(z_2,\cdots,z_n)z_1^{\nu}|\leqslant\left|Q_{\nu\lambda}\left(\frac{cz_2}{\theta},\cdots,\frac{cz_n}{\theta}\right)\right|\frac{\theta^{\lambda+\nu}\sigma^{\nu}}{c^{\lambda}d^{\nu}}<$$

$$<\frac{K}{\sigma^k}\left(\frac{d}{\sigma}\right)^{\nu}c^{\lambda}\frac{\theta^{\lambda+\nu}\sigma^{\nu}}{c^{\lambda}d^{\nu}}=\frac{K\theta^{\lambda+\nu}}{\sigma^k}.$$

此乃表示級数 $\sum_{\nu,\lambda=0}^{\infty}|Q_{\nu\lambda}(z_2,\cdots,z_n)z_1^{\nu}|$ 一致收斂,因之級数

$$Q(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}Q_{\nu\lambda}(z_2,\cdots,z_n)z_1^{\nu}$$

在(4.1.14)絕对收斂并一致收斂. 定理証明.

在定理 4.1.1 中,我們特别取

$$B(z) = z_1^k,$$

此时 $Q_{00} = B_{k0} = 1$,故 $Q(0) = 1$. 因此在 $z = 0$ 的充分小邻域內,函数

$$u(z) = \frac{1}{Q(z)}$$

解析且不取零值. 于是可书(4.1.7)为

$$P(z) = (B(z) + H(z))u(z),$$

其中

$$B(z) + H(z) = z_1^k + H_{k-1}(z_2, \cdots, z_n)z_1^{k-1} + \\ + \cdots + H_0(z_2, \cdots, z_n).$$

此外,由(4.1.6)可知

$$H_\nu(0, \cdots, 0) = 0, \quad \nu = 0, \cdots, k-1.$$

于是我們得

定理 4.1.2 (Weierstrass 預备定理). 如果 $P(z)$ 在原点的邻域解析,且

$$P(0) = 0, \quad P(z_1, 0, \cdots, 0) = \chi z_1^k + \cdots, \quad \chi \neq 0, \quad (4.1.15)$$

则存在唯一的分解式

$$P(z) = [z_1^k + H_{k-1}(z_2, \cdots, z_n)z_1^{k-1} + \\ + \cdots + H_0(z_2, \cdots, z_n)]u(z),$$

其中 $H_\nu(\nu = 0, 1, \cdots, k-1)$ 在 $z_2, \cdots, z_n$ 的原点邻域解析且

$$H_\nu(0, \cdots, 0) = 0 \quad \nu = 0, \cdots, k-1;$$

而 $u(z)$ 在 $z_1, \cdots, z_n$ 的原点的一邻域中解析且不取 0 值.

現在我們証明,对于在原点解析的函数 $P(z)$,如果

$$P(0) = 0, \quad 但 \quad P(z) \not\equiv 0,$$

则可作一非异的綫性变换,使得經变换后有

$$P(z_1, 0, \cdots, 0) = \chi z_1^k + \cdots, \quad \chi \neq 0.$$

这样的函数称为在原点对变数 z_1 **正規化**.

定理 4.1.3. 設 $f^{(1)}(z), \cdots, f^{(l)}(z)$ 皆是在原点解析的函数，且皆不恆为 0，則存在一非异的綫性变換，使得所有这些函数皆在原点对变数 z_1 正規化.

証. 設 U 是原点的一邻域，所有 $f^{(j)}(z)$ $(j=1, \cdots, l)$ 在 U 皆能展为

$$f^{(j)}(z) = f^{(j)}_{k_j}(z) + f^{(j)}_{k_j+1}(z) + \cdots \quad (j=1, \cdots, l),$$

其中 $f^{(j)}_{k_j+m}(z)$ 是 $z_1, \cdots, z_n$ 的 k_j+m 次齐次多項式，且

$$f^{(j)}_{k_j}(z) \not\equiv 0, \quad j=1, \cdots, l.$$

由于 $f^{(1)}_{k_1}(z) \not\equiv 0$，在 U 中必有一点 $a^{(0)}$ 使得 $f^{(1)}_{k_1}(a^{(0)}) \neq 0$，因此有一 $a^{(0)}$ 的邻域 $U_1 \subset U$，使 $f^{(1)}_{k_1}(z) \neq 0$. $f^{(2)}_{k_2}(z)$ 在 U_1 中不能恆等于 0，同样可証，有一非空开集 $U_2 \subset U_1$，使得在 U_2 中 $f^{(2)}_{k_2}(z) \neq 0$. 如此継續，我們有一非空开集 $U_k \subset U$，在其中所有 $f^{(1)}_{k_1}(z), \cdots, f^{(l)}_{k_l}(z)$ 皆不取 0 值. 特別是有一点 $a=(a_1, \cdots, a_n) \in U$，使得

$$f^{(1)}_{k_1}(a) \neq 0, \cdots, f^{(l)}_{k_l}(a) \neq 0,$$

而 a 非原点.

由于存在以 $a_1, \cdots, a_n$ 为第一行的非异方陣，故存在下面形式的非异綫性变換：

$$\begin{cases} z_1 = a_1 w_1 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = a_n w_1 + \cdots. \end{cases}$$

由于 $f^{(1)}_{k_1}(z)$ 是 $z_1, \cdots, z_n$ 的齐次多項式，故有

$$f^{(1)}_{k_1}(z) = f^{(1)}_{k_1}(a) w_1^{k_1} + \cdots, f^{(1)}_{k_1}(a) \neq 0.$$

同样有

$$f^{(2)}_{k_2}(z) = f^{(2)}_{k_2}(a) w_1^{k_2} + \cdots, f^{(2)}_{k_2}(a) \neq 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(l)}_{k_l}(z) = f^{(l)}_{k_l}(a) w_1^{k_l} + \cdots, f^{(l)}_{k_l}(a) \neq 0.$$

定理証明。

下面形式的函数：

$$\pi(z) = z_1^k + H_{k-1}(z_2, \cdots, z_n)z_1^{k-1} + \\ + \cdots + H_0(z_2, \cdots, z_n), \qquad (4.1.16)$$

其中 $H_0, \cdots, H_{k-1}$ 在 $z_2, \cdots, z_n$ 空間的原点的一邻域解析，而且 $H_0(0) = \cdots = H_{k-1}(0) = 0$ 者，称为对变数 z_1 的 k 次示性多項式。它有下面的性質。

定理 4.1.4. 任与正数 $\varepsilon(<1)$，必有一正数 δ，当 $z_2, \cdots, z_n$ 在多圓柱

$$|z_2| < \delta, \cdots, |z_n| < \delta \qquad (4.1.17)$$

中，示性多項式

$$z_1^k + H_{k-1}(z_2, \cdots, z_n)z_1^{k-1} + \\ + \cdots + H_0(z_2, \cdots, z_n) = 0 \qquad (4.1.18)$$

的根 z_1 的絕对值 $< \varepsilon$。

証. 由于 $H_j(0) = 0, j = 0, \cdots, k-1$，我們可取 δ 充分小，使得 $z_2, \cdots, z_n$ 在(4.1.17)中时

$$|H_j(z_2, \cdots, z_n)| < \frac{\varepsilon^k}{k}. \quad j = 0, 1, \cdots, k-1.$$

首先証明 z_1 的根的絕对值不能 $\geqslant 1$. 如果 z_1 是 (4.1.18) 的根而 $|z_1| \geqslant 1$，則

$$|z_1| = \left| H_{k-1} + H_{k-2}\frac{1}{z_1} + \cdots + H_0\frac{1}{z_1^{k-1}} \right| \leqslant \\ \leqslant |H_{k-1}| + |H_{k-2}|\frac{1}{|z_1|} + \cdots + |H_0|\frac{1}{|z_1|^{k-1}} < \varepsilon^k < 1.$$

矛盾. 故必須(4.1.8)的根的絕对值 $|z_1| < 1$. 在此时

$$|z_1|^k = |H_{k-1}z_1^{k-1} + \cdots + H_0| \leqslant \\ \leqslant |H_{k-1}||z_2|^{k-1} + \cdots + |H_0| < \varepsilon^k,$$

故 $|z_1| < \varepsilon$. 定理証明。

由上面的定理及 Weierstrass 預备定理可推知，多复变数 $(n \geqslant 2)$ 解析函数的零点不是孤立的。

定理 4.1.5. 設 $\pi(z)$ 是 z_1 的 k 次示性多項式，其系数在多圓柱

$$|z_2| \leqslant r_2, \cdots, |z_n| \leqslant r_n \tag{4.1.19}$$

中解析，并且此时 $\pi(z)=0$ 的根 z_1 的絕对值 $< r_1 < r$，則存在一正数 M，使得对任一在多圓柱

$$|z_1| \leqslant r, \quad |z_2| \leqslant r_2, \cdots, |z_n| \leqslant r_n \tag{4.1.20}$$

解析并且絕对值 $\leqslant 1$ 的函数 $f(z)$，有一关系式

$$f(z) = g(z)\pi(z) + \lambda(z),$$

其中 $g(z)$ 和 $\lambda(z)$ 都在 $|z_1| \leqslant r_1, |z_2| \leqslant r_2, \cdots, |z_n| \leqslant r_n$ 中解析，并且在該多圓柱內 $g(z)$ 的絕对值 $\leqslant M$，$\lambda(z)$ 是 z_1 的 $k-1$ 次多項式其系数在多圓柱(4.1.19)解析并且絕对值 $\leqslant M$.

証. 由于 $f(z)$ 在

$$|z_1| \leqslant r, \quad |z_2| \leqslant r_2, \cdots, |z_n| \leqslant r_n$$

解析，可命

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|=r} \frac{f(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)}{\pi(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}. \tag{4.1.21}$$

由于 $(z_2, \cdots, z_n)$ 在多圓柱(4.1.19)与 $|\zeta_1| = r$ 时 $\pi(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n) \neq 0$，故 $g(z)$ 在多圓柱 $|z_1| \leqslant r_1, |z_2| \leqslant r_2, \cdots, |z_n| \leqslant r_n$ 中解析. 命

$$\lambda(z) = f(z) - g(z)\pi(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|=r} \frac{f(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)}{\pi(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)} \times$$

$$\times \frac{\pi(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n) - \pi(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1. \tag{4.1.22}$$

其中 $\dfrac{\pi(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n) - \pi(z_1, \cdots, z_n)}{\zeta_1 - z_1}$. 可书为如下形式:

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} z_1^\nu u_\nu(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n),$$

其中 $u_\nu(z_2, \cdots, z_n)$ 在(4.1.19)解析. 因此

$$\lambda(z) = \sum_{v=0}^{k-1} z_1^v v_v(z_2, \cdots, z_n),$$

其中

$$v_v(z_2, \cdots, z_n) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|=r} \frac{f(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)}{\pi(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)} u_v(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n) d\zeta_1.$$

由于多圆柱(2.1.19)与 $|\zeta_1| = r$ 的拓扑积是紧致的，故有正数 ε，使 $|\pi(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)| > \varepsilon$ (ε 只与 π 有关) 由(4.1.21)知

$$|g(z)| \leqslant \frac{1}{(r-r_1)\varepsilon}.$$

而由(4.1.22)知

$$|\lambda(z)| < \frac{2N}{(r-r_1)\varepsilon},$$

其中 N 是 $\pi(z)$ 在(4.1.20)之上界(取之>1)． 命 $M = \dfrac{2N}{(r-r_1)\varepsilon}$，$M$ 只与 π 有关，由此得定理．

§ 4.2. 唯一分解定理． 設 $f \in O^n$，f 在原点的邻域中有展式

$$f(z) = f_k(z) + f_{k+1}(z) + \cdots,$$

其中 $f_k(z)$ 是 $z_1, \cdots, z_n$ 的不恆等于 0 的 k 次齐次多項式，k 称为 f 的級．

如果 f 的級为零，則称为单位．显然 $f(0) \neq 0$ 是 f 为单位的充要条件．

$g \in O^n$ 称为除尽 f 或 $g|f$，如果有一 $h \in O^n$ 使得 $f = gh$ 者，此时 g 称为 f 的因子，而 f 称为 g 的倍元．显然单位 u 能除尽 O^n 中任一元素，所有 O^n 的单位对乘法成一羣．

如果 $g|f$，$f|g$，則 f 等于 g 乘以一单位． 实际上，如果 $f = gh_1$，$g = fh_2$，($h_1, h_2 \in O^n$)，則 $f = fh_1 h_2$． 由此可見，$h_1 h_2$ 之級必須为 0，h_1 与 h_2 亦然；反之，如果 f 等于 g 乘以一单位，則显然有 $f|g$ 及 $g|f$． 这样的互相能除尽的两元素 f 和 g 称为等价，我們以 $f \sim g$ 表之． 显然，这实际是一等价关系，卽有

(i) $f\sim f$; (ii) 如果 $f\sim g$,则 $g\sim f$; (iii) 如果 $f\sim g$, $g\sim h$,则 $f\sim h$.

如果 u 是 O^n 的单位,而 $f|u$,则显然 f 也是单位. O^n 的零元素即在原点有一邻域恆等于 0 的解析函数. 若 f 非零元素,且除了单位及等价于 f 的元素外沒有其他因子,则 f 称为素的或不可約的. 如果 f 非素的,则称为可約的; 如果 f 是可約的,则根据定义可书为 $f=gh$,其中 g 与 h 皆非单位. 由于 g 的級 $+$ h 的級 $=$ f 的級, 可見 f 的級必須 $\geqslant 2$, 因此 f 的級若等于 1, 则必为素的. 但若 f 的級 $\geqslant 2$,也未必是可約的,例如 $f(z)=z_1^2+z_2z_3$.

如果 $g_1,\cdots,g_l$ 是 O^n 的一組元素,除了单位外沒有公因子者,则称为互素,用 $(g_1,\cdots,g_l)=1$ 表之. 如果 $g_1,\cdots,g_l$ 有非单位的公因子 f_1,并且非所有的 g_ν 皆恆等于 0,则 $\dfrac{g_1}{f_1},\cdots,\dfrac{g_l}{f_1}$ 之級分别小于 $g_1,\cdots,g_l$ 之級. 如果 $\dfrac{g_1}{f_1},\cdots,\dfrac{g_l}{f_1}$ 仍有非单位的公因子 f_2,则 $\dfrac{g_1}{f_1f_2},\cdots,\dfrac{g_l}{f_1f_2}$ 之級分别小于 $\dfrac{g_1}{f_1},\cdots,\dfrac{g_l}{f_1}$ 之級. 如此継續,由于当 g_ν 不恆等于零时,其級为有限,故最后有一公因子 f,便得 $\left(\dfrac{g_1}{f},\cdots,\dfrac{g_l}{f}\right)=1$.

值得注意的是,若 $\varphi_1(z),\cdots,\varphi_n(z)$ 是在原点解析且函数行列式不为零的函数組,变换

$$\begin{cases} w_1=\varphi_1(z); \\ \cdots\cdots\cdots \\ w_n=\varphi_n(z) \end{cases}$$

把 $z=0$ 映为 $w=0$, 则經此变换, 上述諸性質不变. 如果 $f,g\in O^n(z)$, 且 $f(z)|g(z)$, 则 $f(z(w))$ 与 $g(z(w))$ 在 $O^n(w)$ 中有 $f(z(w))|g(z(w))$;如果 $f(z)$ 是素的,则 $f(z(w))$ 在 $O^n(w)$ 中也是素的;如果 $(f(z),g(z))=1$,则 $(f(z(w)),g(z(w)))=1$ 等等.

命 $O^{n-1}=O^{n-1}(z_2,\cdots,z_n)$ 表 $n-1$ 个复变数 $z_2,\cdots,z_n$

在原点解析的函数所成的环，又命 $O^{n-1}[z_1]$ 表所有系数在 O^{n-1} 的变数 z_1 的多項式环，即其元素是下面形式者：

$$\alpha_k(z_2, \cdots, z_n)z_1^k + \alpha_{k-1}(z_2, \cdots, z_n)z_1^{k-1} + \cdots + \\ + \alpha_0(z_2, \cdots, z_n),$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in O^{n-1}$.[1] 現在我們引进以后常用的結式概念.

設 $f, g \in O^{n-1}[z_1]$,

$$f(z) = \alpha_k(z_2, \cdots, z_n)z_1^k + \alpha_{k-1}(z_2, \cdots, z_n)z_1^{k-1} + \cdots + \\ + \alpha_0(z_2, \cdots, z_n), \tag{4.2.1}$$

$$g(z) = \beta_l(z_2, \cdots, z_n)z_1^{l-1} + \beta_{l-1}(z_2, \cdots, z_n)z_1^{l-1} + \cdots + \\ + \beta_0(z_2, \cdots, z_n). \tag{4.2.2}$$

f 与 g 的**結式**即下面的 $l + k$ 阶行列式(空白处皆为 0)：

$$\omega(z_2, \cdots, z_n) = \left|\begin{array}{cccccccc} \alpha_k & \alpha_{k-1} & \cdots & \alpha_0 & & & & \\ & \alpha_k & \alpha_{k-1} & \cdots & \alpha_0 & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & \alpha_k & \alpha_{k-1} & \cdots & \alpha_0 \\ \beta_l & \beta_{l-1} & \cdots & \beta_l & & & & \\ & \beta_l & \beta_{l-1} & \cdots & \beta_l & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & \beta_l & \beta_{l-1} & \cdots & \beta_0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} l \text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k \text{ 行} \end{array} \tag{4.2.3}$$

又 f 与 $\dfrac{\partial f}{\partial z_1}$ 的結式称为**判別式**.

現在要証明，如果 f, g 非零元素，則存在不全为零的 $a, b \in O^{n-1}[z_1]$，分别最多为 $l-1$ 次与 $k-1$ 次，使得

$$af + bg = \omega. \tag{4.2.4}$$

設 $a = \lambda_{l-1} z_1^{l-1} + \cdots + \lambda_0$, $\quad b = \mu_{k-1} z_1^{k-1} + \cdots + \mu_0$, $\lambda_{l-1}, \cdots, \mu_0 \in O^{n-1}$. 由(4.2.4)比較 z_1 的系数得

$$\begin{aligned} &\alpha_k\lambda_{l-1} &&+ \beta_l\mu_{k-1} &&= 0, \\ &\alpha_{k-1}\lambda_{l-1} + \alpha_k\lambda_{l-2} &&+ \beta_{l-1}\mu_{k-1} + \beta_l\mu_{k-2} &&= 0; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && && \\ &\qquad\qquad \alpha_0\lambda_0 &&+ \beta_0\mu_0 &&= \omega. \end{aligned}$$

---

1) 在本节中，我們用希腊字母 $\alpha, \beta, \cdots$ 表 O^{n-1} 的元素.

如果 $\omega=0$，上面的綫性方程系数的行列式(即 ω) $=0$，故有不全为零的解 $\lambda_{l-1},\cdots,\mu_0$；如果 $\omega\neq 0$，解 $\lambda_{l-1},\cdots,\mu_0$ 也不全为零，否則 $\omega=0$，矛盾。因此 a 与 b 最少有一不为零。

又，如果 f, g 对 z_1 的次数最少为 1，則 a 与 b 皆不为零。因为如有一为零，例如 $a=0$，則得出

$$bg=\omega.$$

比較 z_1 的系数知，这是不可能的，除非 $b=0$。但 $a=b=0$ 上面已証明是不容許的。

定理 4.2.1. 設 $f, g, h\in O^n$，$f|gh$ 并且 $(f, g)=1$，則 $f|h$。

証. 如果 f, g, h 有一为零元素或单位，則定理是显然的。在 $n=1$ 时，由假設 $(f, g)=1$ 可見 f 或 g 必須为单位，故定理成立。用归納法，假設 $n-1$ 个复变数时定理成立。

(i) 我們称 $O^{n-1}[z_1]$ 的元素

$$p=\nu_k z_1^k+\nu_{k-1}z_1^{k-1}+\cdots+\nu_0$$

为本原的，如果 p 的系数 $\nu_k,\cdots,\nu_0\in O^{n-1}$ 适合关系 $(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_k)=1$。我們先証明所謂 Gauss 引理：$O^{n-1}[z_1]$ 的两个本原元素的乘积仍然是本原的。

設 $\sum_{r=0}^{k}\lambda_r(z_2,\cdots,z_n)z_1^r$ 与 $\sum_{r=0}^{l}\mu_r(z_2,\cdots,z_n)z_1^r$ 是本原的，其中 $\lambda_0,\cdots,\lambda_k,\mu_0,\cdots,\mu_l\in O^{n-1}$，則其积为

$$\sum_{r=0}^{k+l}\nu_r(z_2,\cdots,z_n)z_1^r=\sum_{r=0}^{k}\lambda_r z_1^r\sum_{r=0}^{l}\mu_r z_1^r.$$

于是

$$\nu_r(z_2,\cdots,z_n)=\lambda_0\mu_r+\lambda_1\mu_{r-1}+\cdots+\lambda_r\mu_0,$$
$$(r=0,\cdots,l+k)$$

其中約定

$$\mu_{l+1}=\cdots=\mu_{l+k}=\lambda_{k+1}=\cdots=\lambda_{k+l}=0.$$

如果 $\nu_0,\cdots,\nu_{k+l}$ 非互素，則 O^{n-1} 中有一个素元素 $\pi(z_2,\cdots,z_n)$，它不是单位，且 $\pi|\nu_r$ $(r=0,1,\cdots,k+l)$。由于 $\sum_{r=0}^{k}\lambda_r z_1^r$ 与

$\sum_{r=0}^{l} \mu_r z_1^r$ 是本原的，故必有两非負整数 $a(\leqslant k)$ 与 $b(\leqslant l)$，使得

$$\pi|\lambda_0, \cdots, \pi|\lambda_{a-1}, \quad 但 \quad (\pi, \lambda_a) = 1;$$
$$\pi|\mu_0, \cdots, \pi|\mu_{b-1}, \quad 但 \quad (\pi, \mu_b) = 1.$$

現在考虑

$$v_{a+b} = \lambda_0\mu_{a+b} + \cdots + \lambda_a\mu_b + \cdots + \lambda_{a+b}\mu_0.$$

显然，除了 $\lambda_a\mu_b$ 一項外，其他項都能被 π 所除尽，并且 $\pi|v_{a+b}$，于是 $\pi|\lambda_a\mu_b$. 由归納法假設，$\pi|\lambda_a$ 或 $\pi|\mu_b$，这都与 $(\pi, \lambda_a) = 1$，$(\pi, \mu_b) = 1$ 矛盾. 于是証明了断言.

(ii) 我們不妨假設 f, g, h 皆非单位，且假設 f, g, h 对变数 z_1 是正規化的，否則根据定理 4.1.3 可作一非异綫性变換使之如此. 而定理 4.2.1 不受此变換的影响. 由 Weierstrass 預备定理知，f, g, h 分别等价于 z_1 的示性多項式(見式(4.1.16)) f_1, g_1, h_1，它們关于 z_1 的次数都大于 0，且都是本原元素.

我們要証明，如果 $(f_1, g_1) = 1$，則 f_1 与 g_1 的結式 ω 不恆等于零[1].

我們应用輾轉相除法得到除法算式如下:

$$\left.\begin{aligned}
&g_1 = f_1q_1 + r_1,\\
&\qquad\qquad r_1 \text{ 对 } z_1 \text{ 的次数} < f_1 \text{ 对 } z_1 \text{ 的次数},\\
&\varphi_1f_1 = r_1q_2 + r_2, \quad \varphi_1 \in O^{n-1},\\
&\qquad\qquad r_2 \text{ 对 } z_1 \text{ 的次数} < r_1 \text{ 对 } z_1 \text{ 的次数},\\
&\varphi_2r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad \varphi_2 \in O^{n-1},\\
&\qquad\qquad r_3 \text{ 对 } z_1 \text{ 的次数} < r_2 \text{ 对 } z_1 \text{ 的次数},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_{m-1}r_{m-2} = r_{m-1}q_m + r_m, \quad \varphi_{m-1} \in O^{n-1},\\
&\qquad\qquad r_m \text{ 对 } z_1 \text{ 的次数} < r_{m-1} \text{ 对 } z_1 \text{ 的次数},\\
&\varphi_mr_{m-1} = r_mq_{m+1} + \rho, \quad \varphi_m \in O^{n-1},\\
&\qquad\qquad r_m \text{ 对 } z_1 \text{ 的次数} \geqslant 1, \quad \rho \in O^{n-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.2.5)$$

1) 这可以作为一个定理，以后常要用到.

我們断言 $\rho \neq 0$，如若不然，則 $r_m | \varphi_m r_{m-1}$，由 $\varphi_m \varphi_{m-1} r_{m-2} = \varphi_m r_{m-1} q_m + \varphi_m r_m$ 可知，$r_m | \varphi_m \varphi_{m-1} r_{m-2}$. 如此断續，利用除法算式可証 $r_m | \varphi_1 \cdots \varphi_m f_1$，$r_m | \varphi_1 \cdots \varphi_m g_1$. 命 $\varphi_1 \cdots \varphi_m = \lambda (\in O^{n-1})$，存在 $c, d \in O^{n-1}[z_1]$，使得

$$\lambda f_1 = r_m c, \quad \lambda g_1 = r_m d.$$

我們把 c, d, r_m 的 z_1 的系数的最大公因子分別提出来，可得

$$\lambda f_1 = \alpha r c_1, \quad \lambda g_1 = \beta r d_1, \tag{4.2.6}$$

其中 $\lambda, \alpha, \beta \in O^{n-1}$，$r$, c_1, d_1, f_1, g_1 都是 $O^{n-1}[z_1]$ 中的本原元素. 由 (i) 知 rc_1, rd_1 也都是本原元素. 比較(4.2.6)的 z_1 的最高項系数知，$\alpha | \lambda$, $\beta | \lambda$，于是 $rc_1 = \frac{\lambda}{\alpha} f_1$，$rd_1 = \frac{\lambda}{\beta} g_1$. 今 rc_1 和 rd_1 都是本原元素，所以 $\frac{\lambda}{\alpha}$ 和 $\frac{\lambda}{\beta}$ 都是 O^{n-1} 中的单位，因此我們有

$$f_1 = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-1} rc_1, \quad g_1 = \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{-1} rd_1.$$

此乃表示 f_1 和 g_1 有公因子 r，其 z_1 的次数至少为 1，而 c 对于 z_1 的次数必小于 f_1 对于 z_1 的次数. 因为 f_1 是示性多項式，r 必非单位. 否則命 $z_2 = \cdots = z_n = 0$ 时有 $z_1^k = a_0(z_1^q + b_{l-1} z_1^{q-1} + \cdots + b_0)(z_1^{k-q} + \cdots)$，其中 a_0 和 b_0 都是非零复数. 这是不可能的. 但若 f_1 与 g_1 有非单位的公因子 r，則与假設 $(f_1, g_1) = 1$ 矛盾. 所以 $\rho \neq 0$. 由(4.2.4)知，存在 f_1 与 g_1 的結式 $af_1 + bg_1 = \omega$. 命 $(f_1, g_1) = 1$，我們断言 $\omega \neq 0$. 設若不然，則 $af_1 = -bg_1$，其中 b 对 z_1 的次数小于 f_1 对 z_1 的次数. 在除法算式(4.2.5)的每一行都乘以 b，則 $f_1 | br_1$，$f_1 | br_2$，依次可以証明 $f_1 | b\rho$. 然而 $\rho \in O^{n-1}$，$b \neq 0$，所以只有 $\rho = 0$. 这与上面証明的 $\rho \neq 0$ 矛盾，所以 f_1 和 g_1 的結式 $\omega \neq 0$.

今

$$\omega h_1 = af_1 h_1 + bg_1 h_1.$$

由假設 $f_1 | g_1 h_1$ 知 $f_1 | \omega h_1$，故可书 $\omega h_1 = \lambda f_1 p$，其中 $\lambda \in O^{n-1}$，$p \in O^{n-1}[z_1]$ 是本原的. 比較系数知 $\lambda | \omega$ 而 $\frac{\omega}{\lambda}$ 是 O^{n-1} 中单位，所

以

$$h_1 = \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^{-1} f_1 p.$$

此乃表示 $f_1|h_1$. 定理証明.

定理 4.2.2 (唯一分解定理). 任一 $f \in O^n$ 能在等价意义下唯一地分解为有限个非单位的素元素之积，此即若有两种这样的分解: $f = f_1 \cdots f_l = g_1 \cdots g_k$, 則 $l = k$, 并且把 $g_1, \cdots, g_k$ 的次序适当排列后有 $f_1 \sim g_{\nu_1}$, $f_2 \sim g_{\nu_2}$, $\cdots$, $f_l \sim g_{\nu_l}$.

証. 如果 f 是素的,则定理是显然的; 如果 f 不是素的，則 $f = gh$, g 与 h 皆非单位,而它們的級的和等于 f 的級. 如果 g 与 h 中有一个不是素的,則可継續分解. 由于 f 的級为有限,故經有限步驟后, f 能书为

$$f = f_1 \cdots f_l,$$

其中 $f_1, \cdots, f_l$ 是单位的素元素. 如有另一分解 $f = g_1 \cdots g_k$, 于是

$$f_1 \cdots f_l = g_1 \cdots g_k. \tag{4.2.7}$$

由于 f_r 与 g_s 皆是素的非单位元素,故 $f_r \sim g_s$ 或 $(f_r, g_s) = 1$. 由 $f_1|g_1 \cdots g_k$ 可知,或者 $f_1 \sim g_1$,或者 $f_1|g_2 \cdots g_k$. 如此継續,可知必有一 $g_{\nu_1} \sim f_1$. 在(4.2.7)两端各消去因子 f_1,便得

$$f_2 \cdots f_l = u_1 g_{\nu_2} \cdots g_{\nu_k},$$

其中 u 是单位,而 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 是 $1, \cdots, k$ 的一个排列. 在上式中重复上面的方法,可知 f_2 必等价于右端的某一非单位因子. 續行此法,便得定理.

定理 4.2.3. 若 $f, g \in O^n$, 并且 g 的零点必是 f 的零点，則 $g|f$.

証. 根据定理 4.2.2, g 可分解为有限个非单位的素因子 $g_1, \cdots, g_l$ 之积,故我們只要証明当 g 是素因子时的定理就够了.

我們不妨假定 g 与 f 皆是对变数 z_1 正規化了的. 根据 Weierstrass 預备定理知, $g = g_1 u_1$, $f = f_1 u$, 其中 u 与 u_1 是 O^n 中的单位,而 g_1 与 f_1 是示性多項式. 由于 u 与 u_1 在原点的一邻域中

沒有零点，故在此邻域中 g_1 与 f_1 的零点分别是 g 与 f 的零点，反之亦然．然而 g 是素的，故 g_1 作为 $O^{n-1}[z_1]$ 的元素是不可約的，因此或者 $g_1|f_1$，或者 g_1 与 f_1 互素．

如果 g_1 与 f_1 是互素的，則由定理 4.2.1 証明的最后部分可知，f_1 与 g_1 的結式(4.2.4)中 $\omega \neq 0$，卽存在两元素 $a_1, b_1 \in O^{n-1}[z_1]$，使得

$$a_1g_1 + b_1f_1 = \omega \neq 0, \quad \omega \in O^{n-1}.$$

設

$$g_1 = z_1^k + \alpha_{k-1}(z_2, \cdots, z_n)z_1^{k-1} + \cdots + \alpha_0(z_2, \cdots, z_n),$$

則在 $z_2, \cdots, z_n$ 空間的原点的充分小邻域中任与一組数 $z_2, \cdots, z_n$，必有 k 个 z_1 的根，其絕对值可以小于任一已与的正数 ε（定理 4.1.4），此卽 $g_1(z_1, \cdots, z_n) = 0$，$z$ 在 C^n 的原点的充分小邻域中．根据假定，必有 $f_1(z_1, \cdots, z_n)=0$．因之 $\omega(z_2, \cdots, z_n) = a_1g_1 + b_1f_1 = 0$，对 $z_2, \cdots, z_n$ 空間的原点的某一充分小邻域中任一点皆然．此乃表示 $\omega(z_2, \cdots, z_n) \equiv 0$，換言之，$\omega$ 是 O^{n-1} 的零元素．矛盾．定理証明．

到現在为止，本章仅討論了一个解析函数 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 的零点的局部性質．对于多个解析函数 $f_1(z_1, \cdots, z_n), \cdots, f_l(z_1, \cdots, z_n)$ 的公共零点的局部性質的研究[1]，需要更多的代数工具，特别是理想論，这在以后有机会时再专門討論之．

至于零点的大范围的研究，則存在更多的問題．习知，在 $n = 1$ 的情形，任与一域 D 及一串点 $a_1, a_2, \cdots$，在 D 内沒有聚点者，及任与一串正整数 $k_1, k_2, \cdots$，我們恆可作一在 D 内解析的函数 $f(z)$，在 $a_1, a_2, \cdots$，上分别是 $k_1, k_2, \cdots$ 重零点．因为根据 Mittag-Leffler 定理(例如参閱 H. Behke u. F. Sommer [1])，我們可作一 D 内亚純的函数 $g(z)$，它以 $a_1, a_2, \cdots$ 为极点，并且在此点 $g(z)$ 的主要部分为 $\frac{k_l}{z - a_l}$．如是

$$f(z) = \exp\left\{\int_a^z g(z)dz\right\}$$

1) 可参閱 W. Rükert [1]; H. Cartan [3].

便是所求的函数。

在 $n>1$ 的情形，由于零点是非孤立的，相应的問題应如下建立：

設D的每一点 a 有一 $p_a \in O_a^n$ 在 $P(a, r_a) \subset D$ 中解析，并且适合互不矛盾的条件，即若 $P(a, r_a) \cap P(b, r_b) \neq 0$，則在此交集中 $p_a \sim p_b$. 現在的問題是：是否存在一个在D解析的函数，使得在D的每一点 a 的邻域 $P(a, r_a)$ 中，f 展为 n 重冪級数 f_a 时，有 $f_a \sim p_a$? 这就是著名的 Cousin 第二問題的特殊情形。

K. Oka [1] 曾对上面的問題举出如下的反例：

取两个复变数 z, w 的情形，而命D为拓扑积：

$$\frac{3}{4} < |z| < \frac{5}{4}, \quad \frac{3}{4} < |w| < \frac{5}{4}.$$

在 C^2 中适合 $w = z + 1$ 的点集所成的解析平面能以一复参数 ζ 表之：

$$z = \zeta, \quad w = \zeta + 1. \tag{4.2.8}$$

上述点集包含在D内的部分必須适合

$$\frac{3}{4} < |\zeta| < \frac{5}{4}, \quad \frac{3}{4} < |\zeta + 1| < \frac{5}{4}. \tag{4.2.9}$$

由于 $\mathscr{I}m(z) = \mathscr{I}m(w) = \mathscr{I}m(\zeta)$，我們可以把解析平面在$D$内的点分为两部分：

L: $\mathscr{I}m(\zeta) > 0$ 及 L_1: $\mathscr{I}m(\zeta) < 0$.

注意 $\mathscr{I}m(\zeta) = 0$ 的点不在D中，即不适合条件(4.2.9)，因为此时必須 $\frac{3}{4} < |\mathrm{Re}(\zeta)| < \frac{5}{4}$. 若 $\mathrm{Re}(\zeta)$ 为正数，則 $1 + \mathrm{Re}(\zeta) > 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$; 若 $\mathrm{Re}(\zeta)$ 为負数，則 $1 + \mathrm{Re}(\zeta) < 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. 两者皆不符合(4.2.9)的第二个条件。 由此可見，有一充分小的正数 ε，使得适合条件 $\mathscr{I}m(\zeta) = \pm\varepsilon$ 的点仍旧不在D中，即(4.2.9)仍不能成立。 因此存在一正数 σ，使得对任两点 $(z, w) \in L$ 及 $(z_1, w_1) \in L_1$ 恆有 $|z - z_1| > \sigma$, $|w - w_1| > \sigma$.

在域D中，对于 $a \in D - L$ 的点，給与一邻域 $P(a, r_a) \subset D - L$

及一在此邻域中解析的函数元素 $p_a \sim 1$. 对于 $b \in L$ 点,給与邻域 $P(b, r_b)$, $r_b = (r_1, r_2)$, $r_1 < \sigma$, $r_2 < \sigma$, 及在此邻域中的元素 $p_b \sim w - z - 1$. 这样的集合 $\{p_a\}_{a \in D}$ 是适合互不矛盾的条件的. 实际上,如果 a, b 皆在同一的点集 $D - L$ 或 L, 則 $p_a \sim p_b$ 是显然的. 如果 $a \in D - L$ 而 $b \in L$, 則交集 $P(a, r_a) \cap P(b, r_b)$ 若是非空的, 必包含在 $D - L$ 中. 由于 $P(b, r_b)$ 不包含 L_1 的点,故 $P(a, r_a) \cap P(b, r_b)$ 不包含解析平面(4.2.8)的点,于是在此交集中 $p_b \sim w - z - 1 \sim 1$. 因此 $p_a \sim p_b$.

假定問題是可解的, 卽存在一在 D 内解析的函数 $f(z, w)$, 在 L 为零而在 $D - L$ 沒有零点.

在 w 平面的圓周上取一点 $w = e^{\frac{\pi}{3}i}$, 如是函数 $f(z, e^{\frac{\pi}{3}i})$ 在 z 平面的域 Δ_1:

$$\frac{3}{4} < |z| < \frac{5}{4}$$

解析. 由于 $f(z, w)$ 的零点包含在 $w - z - 1 = 0$ 的解析平面中, 当 $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ 时, $z = -1 + e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, 此时 $\mathscr{I}m(z) = \sin\frac{2\pi}{3} > 0$, 故 $(z, w) \in L$, 而 $z = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ 是 $f(z, e^{\frac{\pi}{3}i})$ 的在 Δ_1 的唯一的单重零点. 我們作圓 $C_{\frac{9}{8}} = \left\{|z| = \frac{9}{8}\right\}$ 及 $C_{\frac{7}{8}} = \left\{|z| = \frac{7}{8}\right\}$, 則 $f(z, e^{\frac{\pi}{3}i})$ 在此两圓周上沒有零点.

在 w 平面的圓周 $|w| = 1$ 上取一点 $w = e^{-\frac{\pi}{3}i}$, 此时 $\mathscr{I}m(w) = -\sin\frac{\pi}{3} < 0$, 故 $f(z, e^{-\frac{\pi}{3}i})$ 在 Δ_1 中沒有零点.

我們命 w 平面上沿 $|w| = 1$ 由 $e^{-\frac{\pi}{3}i}$ 点以逆时針方向至 $e^{\frac{\pi}{3}i}$ 点的圓弧为 γ_1, 而由 $e^{\frac{\pi}{3}i}$ 点以逆时針方向至 $e^{-\frac{\pi}{3}i}$ 点的圓弧为 γ_2, 此卽

$$\gamma_1: \quad w = e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3};$$

$$\gamma_2: \quad w = e^{i\theta}, \quad \frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{5}{3}\pi.$$

函数 $f(z, e^{i\theta})$ 对 θ 是实的解析函数,对 z 在 Δ_1 是复的解析函数. 我們要証明

(i) 当 $z \in C_{\frac{9}{8}}$, $w = \gamma_1$ 时, $f(z, e^{i\theta})$ 沒有零点;

(ii) 当 $z \in C_{\frac{7}{8}}$, $w \in \gamma_2$ 时, $f(z, e^{i\theta})$ 也沒有零点.

实际上,当 $w = e^{i\theta} \in \gamma_1$ 时,則 $-\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$,而 $f(z, e^{i\theta})$ 的零点必然在 $z = -1 + w = (\cos\theta - 1) + i\sin\theta$ 时取得, 这样便必須有 $|z|^2 = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$. 因为 $-\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$, 故 $|z|^2 \leqslant 1$. 这証明了(i). 同理,如果 $z \in C_{\frac{7}{8}}$, $w = e^{i\theta} \in \gamma_2$,則 $|z|^2 = 4\sin^2\frac{\theta}{2} \geqslant 1 > \frac{7}{8}\left(\text{因为 } \frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{5}{3}\pi\right)$. 这也証明了 (ii).

現在考慮 $\log f(z, e^{i\theta})$, 当 $z \in C_{\frac{9}{8}}$, $-\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$. 由 (i) 知, $\log f(z, e^{i\theta})$ 的每一分支是 θ 的連續函数,对每一固定的 θ,当 z 沿 $C_{\frac{9}{8}}$ 繞行一周而回到原来的位置时, $\log f(z, e^{i\theta})$ 增加 $2k\pi i$, k 是一整数. 我們断言, k 与 θ 无关. 实际上,若我們固定一个分支 $\log f(z, e^{i\theta})$, 并設 z 沿 $C_{\frac{9}{8}}$ 繞一周时所得的另外一个分支为 $F(z, e^{i\theta})$,这也是 θ 的連續函数. 由假設

$$F(z, e^{i\theta}) - \log f(z, e^{i\theta}) = 2\pi i k(\theta).$$

当 θ 在閉間隔 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 中, 上式左端是連續的, 故有一正数 η, 使得此間隔的任两值 θ_1, θ_2 适合 $|\theta_1 - \theta_2| < \eta$ 时, $|F(z, e^{i\theta_1}) - F(z, e^{i\theta_2})| + |\log f(z, e^{i\theta_1}) - \log f(z, e^{i\theta_2})| < \frac{1}{2\pi}$. 于是有 $|k(\theta_1) - k(\theta_2)| < 1$,但 $k(\theta_1)$与 $k(\theta_2)$皆为整数,故 $k(\theta_1) = k(\theta_2)$. 此乃表示当 $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 (0 < \theta_2 - \theta_1 < \eta)$ 时 $k(\theta)$ 与 θ 无关. 我們可以把間隔 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 分割为距离小于 $\frac{\eta}{2}$ 的小間隔,由此得

知 $k(\theta)$ 与 θ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 之値无关. 这証明了我們的断言.

我們以 $\delta[f(z, e^{i\theta}), C]$ 表 z 在域 Δ_1 中以正方向沿一閉曲綫 C 繞行一周后 $\log f(z, e^{i\theta})$ 所增加的数值. 上面已証明, 当 $-\frac{\pi}{3} \leqslant \theta_1, \theta_2 \leqslant \frac{\pi}{3}$ 时,恆有

$$\delta[f(z, e^{i\theta_1}), C_{\frac{9}{8}}] = \delta[f(z, e^{i\theta_2}), C_{\frac{9}{8}}];$$

特别取 $\theta_1 = -\frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{\pi}{3}$, 我們有

$$\delta[f(z, e^{-\frac{\pi i}{3}}), C_{\frac{9}{8}}] = \delta[f(z, e^{\frac{\pi i}{3}}), C_{\frac{9}{8}}]. \qquad (4.2.10)$$

当 $z \in C_{\frac{7}{8}}$, $w = e^{i\theta} \in \gamma_2\left(\text{即 } \frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{3}\right)$ 时, 由 (ii) 可知, $\log f(z, e^{i\theta})$ 的每一分支是 θ 的連續函数. 同理可証 $\delta[f(z, e^{i\theta}), C_{\frac{7}{8}}]$ 与 θ 无关,特别是

$$\delta[f(z, e^{\frac{\pi}{3}i}), C_{\frac{7}{8}}] = \delta[f(z, e^{\frac{5\pi}{3}i}), C_{\frac{7}{8}}].$$

由于 $e^{\frac{5\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$, 故有

$$\delta[f(z, e^{\frac{\pi i}{3}}), C_{\frac{7}{8}}] = \delta[f(z, e^{-\frac{\pi i}{3}}), C_{\frac{7}{8}}]. \qquad (4.2.11)$$

在 z 平面上,我們以点 $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 为中心作一圓 γ,其半径充分小,包含于圓环 $\frac{7}{8} < |z| < \frac{9}{8}$ 中. 已知 $f(z, e^{\frac{\pi i}{3}})$ 在 Δ_1 中除了点 $z = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 为单重零点外,沒有其他零点,因此有

$$\delta[f(z, e^{\frac{\pi i}{3}}), C_{\frac{9}{8}}] - \delta[f(z, e^{\frac{\pi i}{3}}), C_{\frac{7}{8}}] - \delta[f(z, e^{\frac{\pi i}{3}}), \gamma] = 0.$$

又,我們已知 $f(z, e^{-\frac{\pi i}{3}})$ 在 Δ_1 中沒有零点,因此

$$\delta[f(z, e^{-\frac{\pi i}{3}}), C_{\frac{9}{8}}] - \delta[f(z, e^{-\frac{\pi i}{3}}), C_{\frac{7}{8}}] = 0.$$

由上两式及(4.2.10),(4.2.11)知,

$$\delta[f(z, e^{\frac{\pi i}{3}}), \gamma] = 0.$$

但另一方面，$z=e^{\frac{2\pi i}{3}}$是 $f(z, e^{\frac{\pi i}{3}})$ 的单重零点，故必須有

$$\delta[f(z, e^{\frac{\pi i}{3}}), \gamma]=2\pi i.$$

矛盾，这証明了 $f(z, w)$ 是不存在的，也就是說在D的第二 Cousin 問題无解。

在什么域中这里的特殊 Cousin 第二問題有解呢？在什么域里又沒有解呢？这是一个根本性問題，在本章末再詳細介紹。

§ 4.3. **連續性定理.** 多于一个复变数的解析函数的奇异点与单复变数的情況大为不同，其特点之一是不能任意地給与，这从下面的定理可以看到.

定理 4.3.1. 設D是 $n+1$ 个复变数 $w, z_1, \cdots, z_n$ 的空間 C^{n+1} 的域，定义如下：D^n 是 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ 空間 C^n 的域，对每一点 $z\in D^n$，有一w平面的由閉簡单曲綫围成的域 D_z，而

$$D=\{(w, z)|z\in D^n, w\in D_z\}.$$

又設E为空間 C^{n+1} 的点集，定义如下：E^n 是包含于 D^n 的空間 C^n 的点集，对每一点 $z\in E^n$，有一w平面的点集 E_z，其閉包包含于 D_z 內，而

$$E=\{(w, z)|z\in E^n, w\in E_z\},$$

并且对每一点 $z^{(0)}\in E^n$，有一 D^n 中的邻域 $U^n(z^{(0)})$，使得交集 $\bigcap\limits_{z\in U^n(z^{(0)})} D_z$ 是w平面的单連通域，而点集 $\sum\limits_{z\in U^n(z^{(0)})} E_z$ 的閉包是包含在 $\bigcap\limits_{z\in U^n(z^{(0)})} D_z$ 中. 此外，我們假定 $D-E$ 仍是一域，D^n-E^n 包含有 D^n 的內点. 在此等假設下，任一在 $D-E$ 解析的函数 $f(w, z_1, \cdots, z_n)$ 必可解析展拓到整个域 D.

証. 对每一点 $z\in D^n$，我們任取一光滑的閉簡单曲綫 C_z 包含于 D_z，而此曲綫之內部 $\tilde{C}_z$ 包含 E_z 的閉包. 由于 $f(w, z)$ 对变数w在 D_z-E_z 中解析，我們可作函数

$$g(w, z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z}\frac{f(\zeta, z)}{\zeta-w}d\zeta,$$

此函数对 w 在 $\widetilde{C}_z$ 解析。 值得注意，此函数与 C_z 的取法无关，即若在 w 平面有另一光滑的閉簡单曲綫 C_z^* 包含于 D_z，而其內部 $\widetilde{C}_z^*$ 包含 E_z 的閉包，則对任一点 $w\in\widetilde{C}_z\cap\widetilde{C}_z^*$，根据 Cauchy 定理知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z}\frac{f(\zeta,z)}{\zeta-w}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_z^*}\frac{f(\zeta,z)}{\zeta-w}d\zeta.$$

因此，$g(w,z)$ 可在整个域 D 定义。 我們要証明，它对所有变数 (w,z) 在 D 解析。

任取一固定点 $z^{(0)}\in D^n$，于是有 $z^{(0)}$ 的邻域 $U^n(z^{(0)})$ 适合定理假設的条件。我們在 w 平面的域 $D_{z^{(0)}}$ 中，任取一光滑的閉簡单曲綫 $\gamma_{z^{(0)}}$，使得其內部 $\tilde{\gamma}_{z^{(0)}}$ 包含 $\sum\limits_{z\in U^n(z^{(0)})}E_z$ 的閉包。 这是可能的，因为根据假設，此閉包 $\subset\bigcap\limits_{z\in U^n(z^{(0)})}D_z\subset D_{z^{(0)}}$。 由于 $f(w,z)$ 在 $w\in\gamma_{z^{(0)}}$ 的点 $(w,z^{(0)})$ 皆解析，故有一充分小的 D^n 中的 $z^{(0)}$ 邻域 $V^n(z^{(0)})$，使得 $f(w,z)$ 在 $\gamma_{z^{(0)}}\times V^n(z^{(0)})$ 的每一点皆解析。 取 $V^n(z^{(0)})$ 同时包含于 $U^n(z^{(0)})$ 中，作函数

$$\psi(w,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z^{(0)}}}\frac{f(\zeta,z)}{\zeta-w}d\zeta.$$

这显然是在 $\tilde{\gamma}_{z^{(0)}}\times V^n(z^{(0)})$ 中解析的函数，又根据上面的注意(顧及 $\gamma_{z^{(0)}}$ 包含 E_z，而当 $z\in V^n(z^{(0)})$ 时包含于 D_z 中)，有

$$g(w,z)\equiv\psi(w,z).$$

此乃表示 $g(w,z)$ 在 $\tilde{\gamma}_{z^{(0)}}\times V^n(z^{(0)})$ 解析。 由于 $z^{(0)}$ 可以是 D^n 中任一点，而 $\gamma_{z^{(0)}}$ 可以是 $D_{z^{(0)}}$ 中任一包含 $\sum\limits_{z\in U^n(z^{(0)})}E_z$ 的曲綫，故 $g(w,z)$ 在 D 解析。

由假設 D^n-E^n 含有內点，即含有一非空的开集 K^n。 当 $z\in K^n$，$f(w,z)$ 对变数 w 在 D_z 解析，因此有

$$g(w, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_z} \frac{f(\zeta, z)}{\zeta - w} d\zeta = f(w, z).$$

換言之，$f(w, z)$ 与 $g(w, z)$ 在 $D-E$ 中一非空开集內恆等，即 $f(w, z)$ 可解析展拓至整个域 D. 定理証明.

下面举几个应用上述定理的例子，讀者可根据此定理証明之.

例 (i). 設 D 为超球 $(n \geqslant 2)$

$$|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < R^2,$$

而 E 为超球

$$|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \leqslant r^2 (0 < r < R),$$

則任一函数 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 若在 $D-E$:

$$r^2 < |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < R^2$$

解析，必可解析至整个超球 D.

例 (ii). 設 G_1 是 z_1 平面的由一閉簡单曲綫圍成的域，B_1 是包含于其中的一閉集. 命 $G_2, \cdots, G_n$ 分別是 $z_2, \cdots, z_n$ 平面的域；$U_2, \cdots, U_n$ 分別是 $G_2, \cdots, G_n$ 中的非空开集. 若函数 $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 当 $(z_2, \cdots, z_n) \in U_2 \times \cdots \times U_n$, $z_1 \in G_1$ 时及当 $(z_2, \cdots, z_n) \in G_2 \times \cdots \times G_n$, $z_1 \in G_1 - B_1$ 时是解析的，則 $f(z)$ 可解析展拓至 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$.

例 (iii). 若函数 $f(z)$ 在整个 C^n 中除了一有界点集外解析并有界，則必为常数 $(n \geqslant 2)$.

应用例 (ii)，我們可以証明

定理 4.3.2. (連續性定理). 設在 z_1 平面上有由閉簡单曲綫 C 圍成的域 D_1, 又設 $(z_2^{(\nu)}, \cdots, z_n^{(\nu)})$ 是空間 C^{n-1} 的收斂于点 $(a_2, \cdots, a_n)$ 的点串. 若函数 $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 当 z_1 在曲綫 C 上而 $z_2 = a_2, \cdots, z_n = a_n$ 时是解析的，又当 z_1 在 D_1 的閉包 $\overline{D}_1$ 而 $z_2 = z_2^{(\nu)}, \cdots, z_n = z_n^{(\nu)} (\nu = 1, 2, \cdots)$ 时是解析的，則 $f(z)$ 在 $z_1 \in \overline{D}_1$, $z_2 = a_2, \cdots, z_n = a_n$ 的点解析.

証. $f(z)$ 当 z_1 在曲綫 C 上 $z_2 = a_2, \cdots, z_n = a_n$ 时解析，即有 $a_2, \cdots, a_n$ 的邻域

$$G_2 = \{|z_2 - a_2| < r_2\}, \cdots, G_n = \{|z_n - a_n| < r_n\}$$

及 z_1 平面的域 $G_1 \supset \overline{D}_1$ 与包含于 D_1 的閉域 B_1,使得 $f(z)$ 在

$$z_1 \in G_1 - B_1, \quad (z_2, \cdots, z_n) \in G_2 \times \cdots \times G_n$$

解析.

由于 $(z_2^{(\nu)}, \cdots, z_n^{(\nu)})$ 收斂为 $(a_2, \cdots, a_n)$, 我們有一充分大的正整数 k_0,使得点 $(z_2^{(k_0)}, \cdots, z_n^{(k_0)})$ 包含在 $G_2 \times \cdots \times G_n$ 中. 又由于 $f(z)$ 在

$$z_1 \in \overline{D}_1, \quad z_2 = z_2^{(k_0)}, \cdots, z_n = z_n^{(k_0)}$$

解析,我們可适当选择 G_1 及 $z_2^{(k_0)}, \cdots, z_n^{(k_0)}$ 的邻域

$$U_2 = \{|z_n - z_n^{(k_0)}| < \varepsilon_2, \cdots, U_n = \{|z_n - z_n^{(k_0)}| < \varepsilon_n\},$$

使得 $f(z)$ 在

$$z_1 \in G_1, \quad (z_2, \cdots, z_n) \in U_2 \times \cdots \times U_n$$

解析.

取 $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 充分小,使 $U_2 \subset G_2, \cdots, U_n \subset G_n$. 应用例(ii)的結果便知, $f(z)$ 在

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$$

解析,特别是在

$$z_1 \in \overline{D}_1, \quad z_2 = a_2, \cdots, z_n = a_n$$

解析. 定理証明.

由上面的定理可推出

定理 4.3.3. 設 a 是超球

$$S = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 < r^2\}$$

的边界点. 若 $U(a)$ 是給与的 a 的邻域,而函数 $f(z)$ 在点集

$$U(a) \cap \{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 > r^2\}$$

解析,則必有一 a 的充分小邻域 $V(a)$,使得函数 $f(z)$ 可解析展拓至 $V(a)$.

証. 不妨假定 $a = (0, \cdots, 0, r)$, 否則可作一酉綫性变换使之如此,而此变换使 S 不变.

取包含于 $U(a)$ 的閉多圓柱

$$|z_1| \leqslant \varepsilon_1, \cdots, |z_{n-1}| \leqslant \varepsilon_{n-1}, \quad |z_n - r| \leqslant \varepsilon_n.$$

当正整数 ν 充分大使 $\frac{1}{\nu} < \varepsilon_n$ 时，命

$$z_1 \in \overline{D}_1 = \{|z_1| \leqslant \varepsilon_1\}, \quad z_2^{(\nu)} = \cdots = z_{n-1}^{(\nu)} = 0,$$

$$z_n^{(\nu)} = r + \frac{1}{\nu}.$$

显然 $(z_1, z_2^{(\nu)}, \cdots, z_n^{(\nu)}) \in U(a)$ 而

$$|z_1|^2 + |z_2^{(\nu)}|^2 + \cdots + |z_n^{(\nu)}|^2 > r^2,$$

故 $f(z)$ 在此等点 $(z_1, z_2^{(\nu)}, \cdots, z_n^{(\nu)})$ 解析.

又当

$$z_1 \in C = \{|z_1| = \varepsilon_1\}, \quad z_2 = \cdots = z_{n-1} = 0, \quad z_n = r$$

时，亦有 $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 > r^2$，故 $f(z)$ 在上面的点解析.

应用定理 4.3.2 知，$f(z)$ 在

$$|z_1| \leqslant \varepsilon_1, \quad z_2 = \cdots = z_{n-1} = 0, \quad z_n = r$$

解析，亦即有一邻域 $V(a)$：

$$|z_1| < \varepsilon_1, \quad |z_2| < \delta_2, \cdots, |z_{n-1}| < \delta_{n-1}, \quad |z_n - r| < \delta_n,$$

$f(z)$ 在其中解析. 定理証明.

由上定理可見，多于一个复变数的空間，能够有这样一些域，这些域的一些边界点有如此性質：任一在域内解析的函数，必可經过这些边界点解析展拓至域外. 这种奇妙的性質是单复变数解析函数所沒有的. 在单复变数函数論中，习知对任一域 D 必有一在此域内解析的函数，但不能解析展拓至域 D 外，即此函数以域 D 的边界为自然边界[1]. 而定理 4.3.3 說明，在多于一个变数的空間中，并非任一域皆可以作为某一在域内解析的函数的自然边界. 对于如此的域，即最少有一函数在其内解析而以其边界作为自然边界者，我們称为**正則域**. 研究正則域者大不乏人[2]. 什么域是正則域，什么域不是正則域，这是多复变数解析函数論的根本問題之一. 1911 年，E. E. Levi [1] 曾經提出过关于正則域的充要条件的猜想，

1) 参閱 Behnke u. Sommer [1]，第三章，§ 8.

2) 可参閱 Б. А. Фукс [4] 的总結性文章，虽然最近的結果还沒有包括在内.

后来为 K. Oka [2] 解决. 由于正則域的研究需要較多的其他数学分支的知識,这里不准备进一步討論.

§ 4.4. 奇异点解析超曲面. 从上节我們知道,解析函数的奇异点必非孤立的. 現在我們进一步研究某些奇异点集的几何形状.

定理 4.4.1. 設 $f(z)$ 在原点的邻域

$$|z_1| < r_1, \cdots, |z_n| < r_n \tag{4.4.1}$$

中除去点集 E 外是解析的. 点集 E 与每一解析平面 $z_2 = a_2, \cdots, z_n = a_n$ (z_1 任意)仅交于一点, $(a_2, \cdots, a_n)$ 在

$$|z_2| < r_2, \cdots, |z_n| < r_n \tag{4.4.2}$$

中. 此外,設 $f(z_1, a_2, \cdots, a_n)$ 在 $|z_1| < r_1$ 中有一且只有一奇异点,則点集 E 能以方程

$$z_1 = \varphi(z_2, \cdots, z_n)$$

表之,其中 $\varphi(z_2, \cdots, z_n)$ 在(4.4.2)中是解析的.

証. (i) 先証 $\varphi(z_2, \cdots, z_n)$ 在(4.4.2)中是連續的.

显然 φ 是单值函数, 我們要証明 φ 在 $z_2 = \cdots = z_n = 0$ 点連續. 不妨假定

$$\varphi(0, \cdots, 0) = 0,$$

而証明任与 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得

$$|\varphi(z_2, \cdots, z_n)| < \varepsilon,$$

当

$$|z_2| < \delta, \cdots, |z_n| < \delta.$$

如若不然,有一单調递减的正数串 $\delta_\nu \to 0$ 及一組数串 $(a_2^{(\nu)}, \cdots, a_n^{(\nu)})$, 其中 $|a_k^{(\nu)}| < \delta_\nu$ $(k = 2, \cdots, n)$,使得

$$|\varphi(a_2^{(\nu)}, \cdots, a_n^{(\nu)})| \geqslant \varepsilon.$$

此乃表示 $f(z)$ 在

$$|z_1| < \varepsilon, \quad z_2 = a_2^{(\nu)}, \cdots, z_n = a_n^{(\nu)}$$

解析. 由于 $(a_2^{(\nu)}, \cdots, a_n^{(\nu)}) \to (0, \cdots, 0)$, 根据連續性定理知, $f(z)$ 在 $z = 0$ 点亦解析,这与假設矛盾.

至于 $\varphi(z_2, \cdots, z_n)$ 在(4.4.2)的其它点的連續性，可用同法証之.

(ii) 現証 $n=2$ 时，$\varphi(z_2)$ 在 $|z_2|<r_2$ 中解析.

我們先証 $\varphi(z_2)$ 在 $z_2=0$ 点是解析的.

根据 φ 之連續性，我可取充分小之正数 η，使

$$|\varphi(z_2)|<\frac{1}{5}r_1,$$

当

$$|z_2|<2\eta, \tag{4.4.3}$$

此乃表示 $f(z_1, z_2)$ 在

$$\frac{1}{5}r_1<|z_1|<\frac{2}{5}r_1, \quad |z_2|<2\eta$$

中沒有奇异点. 任取一正数 ρ 适合

$$\frac{1}{5}r_1<\rho<\frac{2}{5}r_1, \tag{4.4.4}$$

及一 $z_1^{(0)}$ 适合

$$|z_1^{(0)}|=\rho,$$

則在

$$|z_1-z_1^{(0)}|<\rho-\frac{r_1}{5}, \quad |z_2|<2\eta \tag{4.4.5}$$

中 $f(z_1, z_2)$ 是解析的，因之能展为級数

$$f(z_1, z_2)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z_2)(z_1-z_1^{(0)})^\nu, \tag{4.4.6}$$

其中 $f_\nu(z_2)$ 在 $|z_2|<2\eta$ 中解析.

当 z_2 适合 $|z_2|<2\eta$，$(\varphi(z_2), z_2)$ 是 $f(z_1, z_2)$ 的奇异点，則 $f(z_1, z_2)$ 在

$$|z_1-z_1^{(0)}|<|\varphi(z_2)-z_1^{(0)}|\left(<\frac{3}{5}r_1\right), \ |z_2|<2\eta \text{ 是解析}$$

的；换言之，若命

$$R(z_2)=|\varphi(z_2)-z_1^{(0)}|, \tag{4.4.7}$$

則 $f(z_1, z_2)$ 在

$$|z_1-z_1^{(0)}|<R(z_2), \quad |z_2|<2\eta \tag{4.4.8}$$

是解析的．此外級数(4.4.6)收斂．

又由 (i) 知，$R(z_2)$ 在 $|z_2|<2\eta$ 連續．我們要証明

(iia) 存在一个在 $|z_2|<\eta$ 內調和的函数 $u(z_2)$，使得

$$\log R(z_2)=\begin{cases}=u(z_2), & \text{当}\quad |z_2|=\eta,\\ \geqslant u(z_2), & \text{当}\quad |z_2|<\eta.\end{cases}\tag{4.4.9}$$

我們知道，存在唯一的在 $|z_2|<\eta$ 內調和的函数 $u(z_2)$，使得

$$u(z_2)=\log R(z_2),\quad \text{当}\quad |z_2|=\eta.$$

我們只要証

$$u(z_2)\leqslant \log R(z_2),\quad \text{当}\quad |z_2|<\eta.$$

已知級数(4.4.6)在 $|z_1-z_1^{(0)}|<R(z_2)$，$|z_2|\leqslant\eta(<2\eta)$ 收斂．若我們能証明此級数在

$$|z_1-z_1^{(0)}|<e^{u(z_2)},\quad |z_2|\leqslant\eta$$

收斂，則必須 $e^{u(z_2)}\leqslant R(z_2)$．这便是所欲証．[因为对每一固定的 z_2，(4.4.6)的收斂半径不能大于 $R(z_2)$．]

在 $|z_2|=\eta$，由 $e^{u(z_2)}=R(z_2)$ 知，級数(4.4.6)在 $|z_1-z_1^{(0)}|<$ $<e^{u(z_2)}$ 收斂．故对每一如此的 z_2，有一最小之正整数 ν_{z_2}，使得

$$|f_\nu(z_2)e^{\nu(u(z_2)-2\varepsilon)}|\leqslant 1,\quad \text{当}\quad \nu\geqslant\nu_{z_2},$$

其中 ε 为任与的固定正数．

我們断言，有一固定的正整数 N，使得 $\nu_{z_2}\leqslant N$，对所有滿足 $|z_2|=\eta$ 的 z_2 皆成立．如若不然，任与正整数 m，有 $z_2^{(m)}(|z_2^{(m)}|=\eta)$ 使得 $\nu_{z_2^{(m)}}>m$．不妨假定 $z_2^{(m)}$ 收斂为 $z_2^{(0)}(|z_2^{(0)}|=\eta)$，否則取其一子串使之如此．

$f(z_1,z_2)$ 在 $|z_1-z_1^{(0)}|<R(z_2^{(0)})$，$z_2=z_2^{(0)}$ 的点解析，因此有正数 δ，使 $f(z_1,z_2)$ 在 $|z_1-z_1^{(0)}|\leqslant e^{u(z_2^{(0)})-\varepsilon}$，$|z_2-z_2^{(0)}|\leqslant\delta$ 中解析，并且在此点集中級数(4.4.6)是一致收斂的．因之有一正整数 ν_0，当 $\nu\geqslant\nu_0$ 时，

$|f_\nu(z_2)e^{\nu(u(z_2^{(0)})-\varepsilon)}|\leqslant 1$，对任意之 z_2 适合 $|z_2-z_2^{(0)}|\leqslant\delta$．我們取 δ 充分之小，使得

$$u(z_2)<u(z_2^{(0)})+\varepsilon,\quad \text{当}\quad |z_2-z_2^{(0)}|\leqslant\delta,\quad |z_2|=\eta.$$

因此有

$$|f_\nu(z_2)e^{\nu(u(z_2)-2\varepsilon)}| \leqslant 1，\ 当\ |z_2 - z_2^{(0)}| \leqslant \delta，\ |z_2| = \eta，\ \nu \geqslant \nu_0.$$

当 m 充分大时，$|z_2^{(m)} - z_2^{(0)}| < \delta$，故有

$$|f_\nu(z_2^{(m)})e^{\nu(u(z_2^{(m)})-2\varepsilon)}| \leqslant 1，\ 当\ \nu \geqslant \nu_0.$$

矛盾. 証明了断言. 由此知，当 $|z_2| = \eta$，

$$|f_\nu(z_2)e^{\nu(u(z_2)-2\varepsilon)}| \leqslant 1，\quad \nu \geqslant N. \tag{4.4.10}$$

作 u 之共軛調和函数 $v(z_2)$，則 $h(z_2) = u + iv$ 在 $|z_2| < \eta$ 解析，而(4.4.10)可书为

$$|f_\nu(z_2)e^{\nu(h(z_2)-2\varepsilon)}| \leqslant 1，\quad 当\quad \nu \geqslant \nu_0，\quad |z_2| = \eta.$$

根据极大模原理，上面不等式在 $|z_2| \leqslant \eta$ 亦成立，立即(4.4.10)在 $|z_2| \leqslant \eta$ 亦成立. 由此易知級数(4.4.6)在

$$|z_1 - z_1^{(0)}| \leqslant e^{u(z_2)-3\varepsilon}，\quad |z_2| \leqslant \eta$$

一致收斂，因此必須

$$e^{u(z_2)-3\varepsilon} \leqslant R(z_2)，\quad 当\quad |z_2| \leqslant \eta.$$

命 $\varepsilon \to 0$，使得所欲証.

(iib) 現在要証明 $\log R(z_2)$ 在 $|z_2| < \eta$ 中是調和函数，即要証

$$\log R(z_2) = u(z_2)，\quad 当\quad |z_2| < \eta.$$

由 (iia) 知，

$$\log R(0) \geqslant u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\eta e^{i\theta})d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log R(\eta e^{i\theta})d\theta. \tag{4.4.11}$$

由(4.4.7)及 $|z_1^{(0)}| = \rho$ 知，上式可书为

$$\log \rho \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |\varphi(\eta e^{i\theta}) - \rho e^{i\psi}| d\theta.$$

在上式两端对 ψ 从 0 到 2π 积分之，并除以 2π，得

$$\log \rho \geqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \log |\varphi(\eta e^{i\theta}) - \rho e^{i\psi}| d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \rho \, d\theta = \log \rho.$$

由此知,(4.4.11)中等式必須成立,即

$$\log R(0) = u(0). \tag{4.4.12}$$

任取一正数 $r < \eta$. 根据 (iia) 知,有一調和函数 $v(z_2)$, 适合

$$\log R(z_2) = \begin{cases} = v(z_2), & 当\ |z_2| = r, \\ \geqslant v(z_2), & 当\ |z_2| < r. \end{cases}$$

重复上面的証明,可得

$$\log R(0) = v(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log R(re^{i\theta})d\theta.$$

如是有

$$0 = \log R(0) - u(0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\log R(re^{i\theta}) - u(re^{i\theta})]d\theta.$$

由于 $\log R(re^{i\theta}) - u(re^{i\theta}) \geqslant 0$, 上式表示必須

$$\log R(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

由于 r 可以是小于 η 之任意正数,故有

$$\log R(z_2) \equiv u(z_2), \quad 当 \quad |z_2| < \eta.$$

(iic) 最后証明 $\varphi(z_2)$ 在 $|z_2| < \eta$ 解析.

根据 (iib), $\log R(z_2)$ 在 $|z_2| < \eta$ 調和,故

$$R(z_2) = e^{\log R(z_2)}$$

有二級連續偏微分.

由

$$\frac{\partial^2 \log R^2(z_2)}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 2\frac{\partial^2 \log R(z_2)}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 0,$$

可得

$$R^2(z_2)\frac{\partial^2 R^2(z_2)}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} - \frac{\partial R^2(z_2)}{\partial z_2}\frac{\partial R^2(z_2)}{\partial \bar{z}_2} = 0. \tag{4.4.13}$$

命 $z_1^{(0)} = \rho e^{i\psi}$. 由(4.4.7)知

$$R^2(z_2) \equiv R^2(z_2, \psi) =$$

$$= \varphi(z_2)\overline{\varphi(z_2)} - \rho[e^{-i\psi}\varphi(z_2) + e^{i\psi}\overline{\varphi(z_2)}] + \rho^2. \tag{4.4.14}$$

由此可知，

$$R^2(z_2, \psi+\pi) - R^2(z_2, \psi) = 2\rho[e^{-i\psi}\varphi(z_2) + e^{i\psi}\overline{\varphi(z_2)}]$$

及

$$\varphi(z_2) = \frac{1}{4\rho}\left\{R^2(z_2, \pi) - R^2(z_2, 0) + \right.$$
$$\left. + i\left[R^2\left(z_2, \frac{3\pi}{2}\right) - R^2\left(z_2, \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}.$$

此乃表示 $\varphi(z_2)$ 有二級連續偏微分.

以(4.4.14)代入(4.4.13)可得

$$-\left(e^{-i\psi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar{z}_2} + e^{i\psi}\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}\right)\rho^3 +$$
$$+\left[\left(e^{-i\psi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar{z}_2} + e^{i\psi}\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}\right)(e^{-i\psi}\varphi + e^{i\psi}\bar{\varphi}) - \right.$$
$$-\left|e^{-i\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial z_2} + e^{i\psi}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z_2}\right|^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}\bar{\varphi} + \frac{\partial\varphi}{\partial z_2}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}_2} +$$
$$\left. + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_2}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z_2} + \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}\varphi\right]\rho^2 + \cdots = 0. \tag{4.4.15}$$

由 (4.4.4) 知，ρ 可以是 $\frac{1}{5}r_1$ 与 $\frac{2}{5}r_2$ 之間的任意数. 故 (4.4.15)的各 ρ 次之系数必須为零. 由(4.4.15)的 ρ^3 的系数

$$e^{-i\psi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar{z}_2} + e^{i\psi}\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z_2\partial\bar{z}_2} = 0, \quad 0 < \psi \leqslant 2\pi$$

可知

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar{z}_2} = \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z_2\partial\bar{z}_2} = 0.$$

由此及由(4.4.15)的 ρ^2 的系数等于零可得

$$e^{-2i\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_2} + e^{2i\psi}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z_2}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{z}_2} = 0.$$

由此可知

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_2} = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z_2} = 0. \tag{4.4.16}$$

我們証明必須前者成立. 因为我們可作变换 $z_1 = z_1^* - z_2^*$,

$z_2 = z_2^*$，而命 $f^*(z_1^*, z_2^*) = f(z_1^* - z_2^*, z_2^*)$. 函数 f^* 在原点的充分小邻域 $|z_1^*| < \varepsilon_1, |z_2^*| < \varepsilon_2$ 中，除去以 $z_1^* = \varphi(z_2^*) + z_2^*$ 定义的奇异点集外，是解析的. 因之可如以上所証明一样推出

$$\frac{\partial[z_2^* + \varphi(z_2^*)]}{\partial \bar{z}_2^*} = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial[z_2^* + \varphi(z_2^*)]}{\partial z_2^*} = 0.$$

如果前者成立，则得出 $\dfrac{\partial\varphi(z_2^*)}{\partial\bar{z}_2^*} = \dfrac{\partial\varphi(z_2)}{\partial\bar{z}_2} = 0$; 如果后者成立，则得出 $1 + \dfrac{\partial\varphi(z_2)}{\partial z_2} = 0$. 故 $\dfrac{\partial\varphi(z_2)}{\partial z_2} \neq 0$，而由 (4.4.16) 知 $\dfrac{\partial\varphi(z_2)}{\partial\bar{z}_2} = 0$.

至此，我們已証明了 $\varphi(z_2)$ 在 $z_2 = 0$ 解析. 若 a_2 为 $|z_2| < r_2$ 的任一点而 $a_1 = \varphi(a_2)$，则可取充分小的双圓柱

$$|z_1 - a_1| < \varepsilon_1, \quad |z_2 - a_2| < \varepsilon_2 \qquad (4.4.17)$$

包含于 $|z_1| < r_1, |z_2| < r_2$ 中者. 命 $z_1^* = z_1 - a_1, z_2^* = z_2 - a_2$, $f^*(z_1^*, z_2^*) = f(z_1^* + a_1, z_2^* + a_2)$，则函数 f^* 在 (4.4.17) 中除了由方程 $z_1^* = \varphi(z_2^* + a_2) - a_1$ 所定义的奇异点外是解析的. 重复上面的証明知 $\varphi^*(z_2^* + a_2) - a_1$ 在 $z_2^* = 0$ 点解析，亦即 $\varphi(z_2)$ 在 $z_2 = a_2$ 点解析. a_2 可以是 $|z_2| < r_2$ 的任一点，故 $\varphi(z_2)$ 在 $|z_2| < r_2$ 解析.

(iii) 現証 $n > 2$ 时，$\varphi(z_2, \cdots, z_n)$ 在(4.4.2)中解析.

任取一組常数 $a_2, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$ 适合

$$|a_2| < r_2, \cdots, |a_{j-1}| < r_{j-1}, \quad |a_{j+1}| < r_{j+1}, \cdots, |a_n| < r_n,$$

而考虑在

$$|z_1| < r_1, \quad |z_j| < r_j$$

中定义的函数 $f(z_1, a_2, \cdots, a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$ 及 $\varphi(a_2, \cdots, a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$.

由于 $f(z_1, a_2, \cdots, z_j, \cdots, a_n)$ 的奇异点适合方程

$$z_1 = \varphi(a_2, \cdots, z_j, \cdots, a_n),$$

应用 $n = 2$ 的結果知，$\varphi(a_2, \cdots, z_j, \cdots, a_n)$ 在 $|z_j| < r_j$ 对变数 z_j 解析 ($j = 2, \cdots, n$). 由于 $\varphi(z_2, \cdots, z_n)$ 在 (4.4.2) 連

續，故在此域中对所有的变数 $z_2, \cdots, z_n$ 是解析的. 定理完全証明.

在一开集 D 內的閉集（对于 D 而言）E 称为（$n-1$ 維）解析超曲面，若对 E 的每一点 a，有一 a 的邻域 U，及在此邻域定义的不恆等于零的解析函数 $f_U(z)$，使得点集 $E \cap U$ 是由 $f_U(z)$ 的零点組成. 由此定义知，定理 4.4.1 的奇异点集成一解析超曲面.

§ 4.5. 亚純函数. 在一域 D 定义的函数 $f(z)$ 称为亚純的，如在 D 的每一点 a，有两元素 $p_a, q_a \in O_a^n$ 在包含于 D 的一邻域 $P(a, r)$ 中是解析的，且 $q_a \not\equiv 0$；又对 $P(a, r)$ 的任一点 b，把 p_a, q_a 看作 O_b^n 的元素时是互素的. 此外，在 $P(a, r)$ 中

$$f = \frac{p_a}{q_a}.$$

$q_a(z) \neq 0$ 的 z 点称为 $f(z)$ 的正則点；$p_a(z) \neq 0$ 而 $q_a(z) = 0$ 的 z 点称为极点；而 $p_a(z) = q_a(z) = 0$ 的点称为不定点.

f 在 $P(a, r)$ 中的表式 $\dfrac{p_a(z)}{q_a(z)}$ 称为在 a 点的局部部分，这是在等价意义下唯一决定的；换言之，若有另一局部部分 $f = \dfrac{p_a^*(z)}{q_a^*(z)}$，則必須

$$p_a \sim p_a^*, \quad q_a \sim q_a^*.$$

这可以如下的証明：由

$$p_a q_a^* = q_a p_a^*$$

可知 $p_a | q_a p_a^*$. 但由 $(p_a, q_a) = 1$ 知 $p_a | p_a^*$（定理 4.2.1）. 同理有 $p_a^* | p_a$，故 $p_a \sim p_a^*$. 仿此可証 $q_a \sim q_a^*$.

定理 4.5.1. 如果 $p, q \in O^n$ 且 $(p, q) = 1$，則存在原点的充分小邻域 U，使得对 U 中任一点 a，把 p, q 看作 O_a^n 的元素时，亦有 $(p, q) = 1$.

証. 我們不妨假定 p 与 q 对 z_1 是正規化的，应用 Weierstrass 預备定理使得

$$p = (z_1^k + \alpha_1 z_1^{k-1} + \cdots + \alpha_k)u,$$
$$q = (z_1^l + \beta_1 z_1^{l-1} + \cdots + \beta_l)v,$$

其中 u, v 是单位，而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_l$ 是 O^{n-1} 中非单位元素. 可取原点的充分小邻域 U，使得 u 与 v 看作是 $O_a^n(a \in U)$ 的元素时仍然是单位。

存在 $O^{n-1}[z_1]$ 中的原素 r 与 s，使得

$$r\frac{p}{u} + s\frac{q}{v} = \omega,$$

其中 ω 是 $\frac{p}{u}$ 与 $\frac{q}{v}$ 的結式. 由于 $(p, q) = 1$，根据定理 4.2.1 的証明 (ii) 知，ω 不恆为零. 我們取 U 充分之小，使得 p, q, r, s, u, v 在此邻域中皆解析. 对任一点 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$，把 p, q, r, s, u, v 看作是 O_a^n 的元素而书之为 $p_a, q_a, r_a, s_a, u_a, v_a$ 时便有

$$r_a\frac{p_a}{u_a} + s_a\frac{q_a}{v_a} = \omega_a,$$

其中 $r_a, s_a, \frac{p_a}{u_a}, \frac{q_a}{v_a}$ 也可看作是 $O_{\tilde{a}}^{n-1}[z_1 - a_1]$ 的元素，$\tilde{a} = (a_2, \cdots, a_n)$，$\omega_a \in O_{\tilde{a}}^{n-1}$ 不恆为零.

显然 $\frac{p_a}{u_a}, \frac{q_a}{v_a}$ 是 $O_{\tilde{a}}^{n-1}[z_1 - a_1]$ 的本原多項式.

設 $d_a \in O_{\tilde{a}}^{n-1}[z_1 - a_1]$ 是 $\frac{p_a}{u_a}$ 与 $\frac{q_a}{v_a}$ 的公因子，則由 $d_a | \omega_a$ 知

$$\omega_a = d_a e_a, \quad e_a \in O_{\tilde{a}}^{n-1}[z_1 - a_1].$$

命

$$d_a = \delta_a d_a^*, \quad e_a = \varepsilon_a e_a^*,$$

其中 $\delta_a, \varepsilon_a \in O_{\tilde{a}}^{n-1}$ 而 d_a^*, e_a^* 是 $O_{\tilde{a}}^{n-1}[z_1 - a_1]$ 的本原多項式. 由于 $\delta_a\varepsilon_a | \omega_a$，我們有 $d_a^* e_a^* = \frac{\omega_a}{\delta_a\varepsilon_a} \in O_{\tilde{a}}^{n-1}$. 因此 $d_a^* e_a^*$ 必須是 $O_{\tilde{a}}^{n-1}$ 的单位. 由此知 d_a^* 与 e_a^* 皆是 $O_{\tilde{a}}^{n-1}$ 的单位，因而 $d_a = \delta_a d_a^* \in O_{\tilde{a}}^{n-1}$.

$\frac{p_a}{u_a}$ 是 $O_{\tilde{a}}^{n-1}[z_1 - a_1]$ 的本原多項式而能以 $O_{\tilde{a}}^{n-1}$ 中的元素

d_a 除尽，d_a 必是 O_a^{n-1} 的单位，也就是 O_a^n 的单位；换言之，

$$\left(\frac{p_a}{u_a}, \frac{q_a}{v_a}\right) = 1.$$

这包含了 $(p_a, q_a) = 1$，定理証明.

在一域 D 内亚純的函数 $f(z)$ 称为**有理函数**，如果存在 $z_1, \cdots, z_n$ 的多項式 $P(z)$ 与 $Q(z)$，使得在 D 中恆有

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (Q(z) \not\equiv 0).$$

显然两有理函数的和、差、积、商仍然是有理函数.

定理 4.5.2. 設 D 是 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 空間的域，D_1 是 $w = (w_1, \cdots, w_m)$ 空間的域，$f(z, w)$ 是 $D \times D_1$ 中的亚純函数. 若当 z 固定时，$f(z, w)$ 是对 w 的有理函数，当 w 固定时，$f(z, w)$ 是对 z 的有理函数，則 $f(z, w)$ 对 z, w 是有理函数.

我們先証一預备定理.

定理 4.5.3. 設 D 是 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 空間的域，D_1 是 $w = (w_1, \cdots, w_m)$ 空間的域，$F_1(z, w), \cdots, F_k(z, w)$ 是在 $D \times D_1$ 中亚純的函数不全恆等于零者，并且对任一固定的 $z \in D$，每一 $F_\nu(z, w)$ 是 w 的在 D_1 中有理的函数. 若在 D_1 中有一組函数 $C_1(w), \cdots, C_k(w)$（并不假定其解析）使得 $z \in D, w \in D_1$ 时适合

$$C_1(w)F_1(z, w) + \cdots + C_k(w)F_k(z, w) = 0$$

而

$$|C_1(w)|^2 + \cdots + |C_k(w)|^2 > 0,$$

則存在一組 $w_1, \cdots, w_m$ 的多項式 $P_1(w), \cdots, P_k(w)$ 不全恆等于零者，使得

$$P_1(w)F_1(z, w) + \cdots + P_k(z, w)F_k(z, w) \equiv 0.$$

証. 我們在域 D 中任取 k 个点 $z^{(1)}, \cdots, z^{(k)}$，而考慮 C_ν 的齐次綫性方程組

$$C_1(w)F_1(z^{(\nu)}, w) + \cdots + C_k(w)F_k(z^{(\nu)}, w) = 0,$$
$$\nu = 1, \cdots, k.$$

由此可知行列式

$$D(w)=\begin{vmatrix} F_1(z^{(1)},w)\cdots F_k(z^{(1)},w) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_1(z^{(k)},w)\cdots F_k(z^{(k)},w) \end{vmatrix}$$

对任一 $w\in D$ 恆为零. 沿第一行展开之,便有

$$\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu(z^{(2)},\cdots,z^{(k)},w)F_\nu(z^{(1)},w)\equiv 0,$$

其中 $C_\nu(z^{(2)},\cdots,z^{(k)},w)$ 是 w 的有理函数. 若它們不全恆等于零,则以此等有理函数的公分母乘全式便得定理,因为 $z^{(1)}$ 可以是 D 中任一点.

如果所有的 $C_\nu(z^{(2)},\cdots,z^{(k)},w)\equiv 0$. 由假設,非所有 $F_\nu(z,w)$ 皆恆等于零,我們总有行列式 $D(w)$ 中的一子行列式不恆等于零. 設

$$\begin{vmatrix} F_{\alpha_1}(z^{(\alpha_1)},w)\cdots F_{\alpha l}(z^{(\alpha_1)},w) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{\alpha_1}(z^{(\alpha l)},w)\cdots F_{\alpha l}(z^{(\alpha l)},w) \end{vmatrix}\equiv 0 \qquad (4.5.1)$$

而

$$\begin{vmatrix} F_{\alpha_2}(z^{(\alpha_2)},w)\cdots F_{\alpha l}(z^{(\alpha_2)},w) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{\alpha_2}(z^{(\alpha l)},w)\cdots F_{\alpha l}(z^{(\alpha l)},w) \end{vmatrix}\not\equiv 0.$$

我們把(4.5.1)左端的行列式沿第一行展开之,便得定理.

現在我們証明定理 4.5.2.

把单項式

$$z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n} \qquad (m_1,\cdots,m_n=0,1,2,\cdots)$$

排列成单一的次序而以 $p_0(z), p_1(z), p_2(z),\cdots$ 表之. 如是任一 $z_1,\cdots,z_n$ 的多項式能表为 $\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu p_\nu(z)$ 的形式.

根据假設,对每一 $w\in D_1$, $f(z,w)$ 是 z 的有理函数,即有两个不全恆等于零的 $z_1,\cdots,z_n$ 的多項式 $P_w(z)$ 与 $Q_w(z)$,使得

$$P_w(z)f(z,w)+Q_w(z)\equiv 0,$$

亦即有

$$\left[\sum_{\mu=0}^{N} a_\mu(w)\, p_\mu(z)\right] f(z, w) + \sum_{\nu=0}^{M} b_\nu(w) p_\nu(z) \equiv 0, \quad (4.5.2)$$

其中

$$\sum_{\mu=0}^{N} |a_\mu(w)|^2 + \sum_{\nu=0}^{M} |b_\nu(w)|^2 > 0.$$

我們不妨假定

$$\sum_{\mu=0}^{N} |a_\mu(w)|^2 + \sum_{\nu=0}^{M} |b_\nu(w)|^2 = 1, \qquad (4.5.3)$$

否則可以

$$\frac{a_\mu}{\sum |a_\nu|^2 + \sum |b_\nu|^2}, \qquad \frac{b_\mu}{\sum |a_\nu|^2 + \sum |b_\nu|^2}$$

分別代替 a_μ, b_μ.

显然多項式 $P_w(z)$ 与 $Q_w(z)$ 的項数 N 和 M 与 w 点有关. 我們命 $D_{N,M}$ 表域 D_1 的点集,其中的 w 点是使对应的多項式 $P_w(z)$, $Q_w(z)$ 的項数分别为 N 与 M 者.

首先注意,如果 $D_{N,M}$ 在域 D_1 内有聚点 $w^{(0)}$, 則 $w^{(0)} \in D_{N,M}$. 即 $D_{N,M}$ 对于 D_1 是閉集.

实际上,如果在 $D_{N,M}$ 中有一点串 $w^{(k)} \to w^{(0)} \in D_1$, 由(4.5.3)知,

$$|a_\mu(w^{(k)})| \leqslant 1, \quad |b_\nu(w^{(k)})| \leqslant 1,$$

因之可取一子串 $\{w^{(k_l)}\}_{l=1,2,\cdots}$ 使得

$$\lim_{l\to\infty} a_\mu(w^{(k_l)}) = a_\mu(w^{(0)}), \quad \lim_{l\to\infty} b_\nu(w^{(k_l)}) = b_\nu(w^{(0)}),$$

其中 $a_\mu(w^{(0)})$ 与 $b_\nu(w^{(0)})$ 为一定数. 由假設 $f(z, w)$ 是亚純的,而 $f(z, w^{(0)})$ 是 z 的有理函数,故必有一点 $z^{(0)}$ 使得 $f(z, w)$ 在 $(z^{(0)}, w^{(0)})$ 的邻域中每一点是正則的,而在此邻域有

$$\lim_{l\to\infty} f(z, w^{(k_l)}) = f(z, w^{(0)}).$$

以 $w = w^{(k_l)}$ 代入(4.5.2),而命 $l \to \infty$ 得

$$\left[\sum_{\mu=0}^{N} a_\mu(w^{(0)})\, p_\mu(z)\right] f(z, w^{(0)}) + \sum_{\nu=0}^{M} b_\nu(w^{(0)}) p_\nu(z) \equiv 0.$$

此乃表示 $w^{(0)}\in D_{N,M}$，故 $D_{N,M}$ 是 D 的閉集；

另一方面，显然有

$$\sum_{N,M=0}^{\infty} D_{N,M} = D_1,$$

而 D_1 是一开集，因此必定有一个 $D_{N,M}$ 包含 D_1 中某一非空开集．否則 $\sum_{N,M=0}^{\infty} D_{N,M}$ 是第一类集合（即可数多个无处稠密的点集之和），这是不能等于 D_1 的[1]．

設 $D_{N,M}$ 包含 D_1 的一非空子域 V_1，在此域中，我們命

$$F_\mu(z, w) = p_\mu(z)f(z, w), \quad \mu = 0, 1, \cdots, N,$$
$$F_{N+\nu+1}(z, w) = q_\nu(z), \quad \nu = 0, 1, \cdots, M,$$

則(4.5.2)能书为

$$\sum_{\mu=0}^{N} a_\mu(w)F_\mu(z, w) + \sum_{\nu=0}^{M} b_\nu(w)F_{N+\nu+1}(z, w) \equiv 0,$$

其中 $z\in D$，$w\in V_1$，而 N 与 M 是固定的．根据定理 4.5.3 知，上面恒等式中 $a_\mu(w)$，$b_\mu(w)$ 能以 $w_1, \cdots, w_m$ 的多項式代替，故定理在 $D\times V_1$ 成立．由于 $f(z, w)$ 在 $D\times D_1$ 是亚純的，因之定理在 $D\times D_1$ 亦成立．于是証明了定理 4.5.2．

多复变数的亚純函数理論中带有根本重要性的問題是求一亚純函数具有已与的极点者，此即 Cousin 問題．这問題严格的說是这样：

我們称在域 D 中給与第一种 Cousin 分布，即在 D 的每一点 a，給与元素 $p_a, q_a\in O_a^n$ 及一邻域 $P(a, r_a)(\subset D)$，p_a, q_a 在其中解析并且 $q_a\not\equiv 0$，$(p_a, q_a)=1$．此外，如果 $P(a, r_a)\cap P(b, r_b)$ 是非空的，則 $\dfrac{p_a}{q_a}-\dfrac{p_b}{q_b}$ 在此交集中是正則的．第一 Cousin 問題（或称 Cousin 加法問題）即問是否存在一在 D 中亚純的函数 $f(z)$，使得对每一点 $a\in D$，$f(z)-\dfrac{p_a}{q_a}$ 在邻域 $P(a, r_a)$ 中是正則的．

1) 参閱 Alexandroff-Hopf[1]，第 I 卷，第一部分，第二章 § 4 定理 V，108 頁．

当 $n=1$ 时，这个問題相当于在 $a\in D$ 給以亚純函数的主要部分

$$\frac{C_1}{z-a}+\frac{C_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{C_k}{(z-a)^k},$$

而求作一在 D 亚純的函数具有已与的主要部分．这問題有解，这就是 Mittag-Leffler 定理．

我們称在域 D 中給与第二种 Cousin 分布，即在 D 中每一点，給与不恆等于零的 $p_a, q_a\in O_a^n$ 及一邻域 $P(a, r_a)$，其正中每一点 p_a, q_a 皆是正則的并且互素．此外，如果 $P(a, r_a)\cap P(b, r_b)$ 是非空的，則在其中每一点有 $\frac{p_a}{q_a}\sim\frac{p_b}{q_b}$．第二 Cousin 問題，即問是否存在一在 D 亚純的函数 $f(z)$，使得对每一点 $a\in D$ 有 $f_a\sim\frac{p_a}{q_a}$．

特别是上問題中所有 $q_a\sim 1$，此即 § 4.2 所提的問題．故若在域 D 中第二 Cousin 問題有解，則后者亦有解；反之，如后一特殊的第二 Cousin 問題在域 D 有解，則一般的第二 Cousin 問題亦有解．这可証之如下：

我們在第二 Cousin 問題中取出所有 $\{p_a\}_{a\in D}$，$\{q_a\}_{a\in D}$．由于对 $P(a, r_a)\cap P(b, r_b)$ 中任一点 c 有 $\frac{p_a}{q_a}\sim\frac{p_b}{q_b}$，亦即 $p_aq_b=$ $=p_bq_au$，其中 u 是单位，易知 $p_a\sim p_b$，$q_a\sim q_b$．根据假設，存在一于 D 内解析的函数 $g(z)$，使得对每一点 $a\in D$ 有 $g\sim p_a$，又有一于 D 内解析的函数 $h(z)$，使得 $h\sim q_a$．命 $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$，这便是所求的解．由此可知，若第二 Cousin 問題有解，則任一在 D 内亚純的函数能表为两个在 D 内解析的函数之商，并且对每一点 $a\in D$，此两解析函数作为 O_a^n 的元素时是互素的．

可是 § 4.2 的反例說明第二 Cousin 問題未必有解，甚至当 D 是一正則域时亦未必有解，因为 § 4.2 例中的域

$$D=\left\{\frac{3}{4}<|z|<\frac{5}{4},\ \frac{3}{4}<|w|<\frac{5}{4}\right\}$$

是一正則域[1].

后来 H. Cartan 与 K. Oka 等人把 Cousin 問題以代数上的模与理想的更一般形式来叙述. K. Oka [1] 証明:对单叶的正則域第一 Cousin 問題可解,而 H. Cartan [5] 用緋苏 (faiceux) 的工具,証明对更一般的 Stein 流形第一 Cousin 問題可解. J. P. Serre [1] 得出第二 Cousin 問題在 Stein 流形上有解的充要条件. 由于他們在解决这些問題的过程中有效地使用緋苏这一工具,使得緋苏理論大大发展起来,广泛地应用到拓扑学、微分几何、代数几何等部門中. 但要詳細地叙述他們的結果,需要其他数学分支的知識頗多,这里只好从略.

---

1) 即有一函数 $f(z, w)$ 在 D 内解析,但不能解析展拓至域 D 之外. 实际上,习知平面上的单位圓 $|z| < 1$ 内有解析的函数 $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{m!}$ 以圓周 $|z| = 1$ 为自然边界. 由此易知 $f(z, w) = g\left(\frac{4z}{5}\right) g\left(\frac{3}{4z}\right) g\left(\frac{4w}{5}\right) g\left(\frac{3}{4w}\right)$ 在 D 内解析,但不能解析展拓至域 D 之外.

参考文献[1]

华罗庚:

[1] On the theory of automorphic functions of a matrix variables I——Geometrical basis, Amer. J. Math., **66** (1944), 470—488.

[2] On the theory of automorphic functions of a matrix variables, II——The classification of hypercircles, Amer. J. Math., **66** (1944), 531—563.

[3] On the theory of Fuchsian functions of several variables, Ann. of Math., **47** (1946), 167—191.

[4] 多复变数非欧空間中黎曼曲率的估計問題,数学学报, **4** (1954), 143—170.

[5] 多复变数函数論中的典型域的調和分析, 1959, 科学出版社, 北京.

华罗庚与陆启鏗:

[1] 关于奇数行列斜对称双曲空間的 Cauchy 公式, 科学記录, **1** (1958), 19—21.

[2] Theory of harmonic functions in classical domains, 中国科学, **8** (1959), 1031—1094.

陆启鏗:

[1] 多复变数函数与酉几何, 数学进展, **2** (1956), 567—662.

[2] 多复变数函数的 Schwarz 引理, 数学学报, **7** (1957), 370—420.

[3] 一个解析不变量及其示性作用, 数学学报, **8** (1958), 243—252.

陆启鏗与許以超:

[1] 关于可递域的一个注記, 数学学报, **11** (1961), 11—23.

陈省身:

[1] Complex manifolds, 1956, Chicago.

一松信:

[1] 多变数函数論, 1956, 共立出版株式会社.

Болтянский, В. П.:

[1] 連續映射的矢量場的同伦理論 (江泽涵, 裘光明, 程庆民譯), 科学出版社.

Голузин, Г. М.:

[1] 复变函数的几何理論 (陈建功譯), 科学出版社.

Пятецкий-щапиро, И. И.:

[1] Об одной проблеме Э. Картана, ДАН, **124** (1959), 272—273.

Фукс, Б. А.:

[1] Über geodätische Manifaltigkeiten einer invarianten Riemannschen Geometrie, Матем. Сборн., **2** (1937), 569—594.

1) 这里仅包含本书曾涉及其内容的文献, 远非有关多复变数函数論方面的完备文献.

[2] О группе движений геометрии, инвариантной при псевдо-конформных отображениях, ДАН, **18** (1938), 3—4.

[3] Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 1948, ОГИЗ.

[4] Естественные гранные аналитических функций комплексных переменных, Успехи матем. наук., **4** (1950), 35—120.

Alexandroff, P. and Hopf, H.:

[1] Topologie, 1935, Berlin.

Behnke, H. und Sommer, F.:

[1] Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 1955, Berlin.

Behnke, H. und Thullen, T.:

[1] Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934, Berlin.

Bergmann, S.:

[1] Über eine Integraldarstellung von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen, Матем. Сборн., **1** (1936), 851—862.

[2] 多个复变数正交函数及其在解析函数論中的应用(陆启鏗,謝暉春譯),科学出版社.

[3] Kernel function and extended class in the theory of fonctions of complex variables, Colloque sur les fonct. de plus. var. complexes, Tenu à Bruxelles, 1953, 135—157.

Bochner, S. and Martin, W. T.:

[1] Several complex variables, 1948, Princeton.

Carathéodory, C.:

[1] Vorlesung über reelle Funktionen, 1927, 第二版.

[2] Über das Schwarzsche Lemma bei analytisehen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Ann., **97** (1927), 76—98.

[3] Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden, Math. Zeit., **34** (1932), 758—792.

[4] Funktionentheorie I–II, 1950.

Cartan, É.:

[1] Sur les domaines bornés homogenès de l'espace de n variables complexes, Hamburg. Univ. Math. sem. Abhandl., **11** (1936), 106—162.

Cartan, H.:

[1] Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, Jour. de Math. pure et appl., **10** (1931), 1—114.

[2] Sur les groupes de transformations analytiques, Actualités Sci. Ind., Exposes Math. **IX** (1935), Paris.

[3] Idéaux et modules de fonctions analytiques de n variables complexes, Bull. Soc. Math. France, **78** (1950), 29—64.

[4] Séminaire sur les fonctions de plusieurs variables, E.N.S., 1951—1952.

[5] Variétés complexes et cohomologie, Colloque sur les fonct. de plus. var. complexes, Tenu à Bruxelles, 1953, 41—55.

Cartan, H. und Thullen, P.:

[1] Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexe Veränderlichen. Regularitäts-und Konvergenzbereiche, Math. Ann., 10 (1932), 617—647.

Cousin, P.:

[1] Sur les fonctions de *n* variables complex, Acta Math., **19** (1895), 1

Hartogs, F.:

[1] Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhangiger Veränderlichen über die Darstellung derselben durch Reichen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, Math. Ann., **62** (1906), 1—88.

[2] Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, Akad. d. wissens., Munich. Math.-ph Kl. Sitz. her., **36** (1906), 223—241.

Levi, E. E.:

[1] Sulle ipersuperficies deells spazio a 4 dimensioniche posson essere fronctiera del campo di esistenza di una funzione analytica di due variablli complesse, Annali di Matem., **18** (1911), 69—79.

Martinelle, E.:

[1] Sur l'extension des théorèmes de Cauchy aux fonctions de plusieurs variables complexes, Colloque sur les fonct. de plus. var. compl., Tenu à Bruxelles, 1953, 109—124.

Oka, K.:

[1] Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables II, Domaines d'holomorphes, J. Sci. Hiroshima, Ser. A. **7** (1937), 115—130.

[2] Sur la théorie des fonctions de plusieurs variables IX, Jan. J. Math., **23** (1953), 97—155.

Osgood, W. F.:

[1] Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, Teil I, 1929, Leipzig.

Rückert, W.:

[1] Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale, Math. Ann., **107** (1932), 259—281.

Serre, J. P.:

[1] Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonct. de plus. var. compl., Tenu à Bruxelles, 1953, 57—68.

Siegel, C. L.:

[1] 多复变数解析函数(龔升譯),科学出版社.

Weierstrass, K.:

[1] Über die Bedingungen der Zerlegbarkeit einer ganzen rationalen Funktion von mehr als zwei Veränderlichen, Werke, Band 3, 149—153.

Weil, A.:

[1] L'integrale Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Ann., **111** (1935), 178—182.

3—1